



D. BERNARDO DE LA CALLE YSERN  
con D. N. I. : 33.501.239

A U T O R I Z A :

Que su tesis doctoral con el título:  
"PROPIEDADES ASINTÓTICAS DE  
POLINOMIOS ORTOGONALES VARIANTES Y  
APROXIMACIÓN RACIONAL" pueda ser utilizada  
para fines de investigación por parte de la Universidad  
Carlos III de Madrid.

Leganés, 24 de febrero de 2000.

A handwritten signature in black ink, which appears to read "Bernardo de la Calle Ysern", is written over a horizontal line.

Fdo.: Bernardo de la Calle Ysern



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**PROPIEDADES ASINTÓTICAS DE  
POLINOMIOS ORTOGONALES VARIANTES Y  
APROXIMACIÓN RACIONAL**

TESIS DOCTORAL

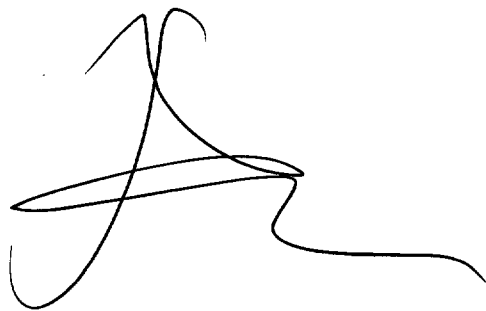
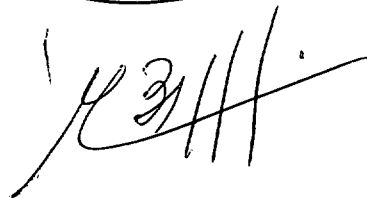
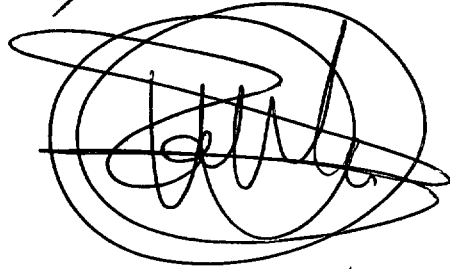
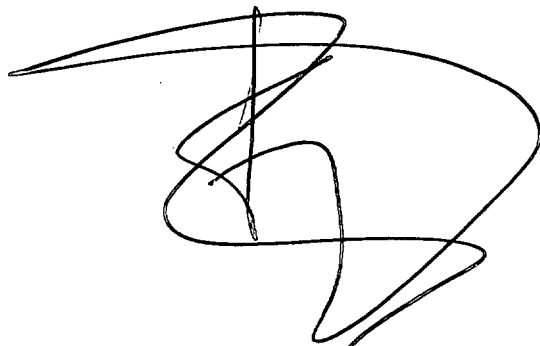
BERNARDO DE LA CALLE YSERN

DIRECTOR:

GUILLERMO T. LÓPEZ LAGOMASINO



LEGANÉS, DICIEMBRE DE 1999





UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**PROPIEDADES ASINTÓTICAS DE  
POLINOMIOS ORTOGONALES VARIANTES Y  
APROXIMACIÓN RACIONAL**

TESIS DOCTORAL

MEMORIA PRESENTADA POR D. BERNARDO DE LA CALLE YSERN PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS POR LA UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID EN EL PROGRAMA DE TERCER CICLO INGENIERÍA MATEMÁTICA.

REALIZADA BAJO LA DIRECCIÓN DEL DR. D. GUILLERMO T. LÓPEZ LAGOMASINO, CATEDRÁTICO DE UNIVERSIDAD VISITANTE DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID.

LEGANÉS, DICIEMBRE DE 1999



A MIS PADRES



## Agradecimientos

Quiero comenzar dando las gracias a Paco Marcellán, que fue la primera persona que confió en mí y posibilitó que me incorporara a su grupo de investigación. Agradezco su entusiasmo en el trabajo, generosidad, paciencia y apoyo durante los últimos seis años.

El penúltimo favor que le debo a Paco es el haber conocido a Guillermo L. Lagomasino, a quien deseo expresar mi sentimiento de profunda gratitud por el tiempo y la dedicación que ha empleado en la dirección de esta tesis, por la confianza depositada en mí, por los conocimientos transmitidos y, sobre todo, por su alegre e inquebrantable sentido de la investigación y curiosidad por las matemáticas.

Mi agradecimiento a Manuel Bello y a Chicho Guadalupe por su colaboración y generosidad en la realización de parte del material contenido en este trabajo. A Domingo Pestana por la lectura de la memoria.

Quiero dar las gracias a los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid, particularmente a Antonio García, por su apoyo; y de manera muy sentida a todos mis compañeros del Programa de Doctorado de Ingeniería Matemática cuya solidaridad y amistad disfruto desde que nos conocimos.

Mi agradecimiento, por su ayuda, a todos los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid y, especialmente, a mis compañeros en la asignatura “Cálculo Infinitesimal” que me facilitaron la tarea siempre que lo necesité.

Son muchas las personas, entre amigos y familiares, que me han ayudado y animado, en los últimos diez años, a continuar mi trabajo. Quiero expresamente agradecerse a Paloma García y a Amadeo Maños.

Y no puedo terminar sin antes dar las gracias a Jaime, Pablo y Javier Ysern de la Calle, que prescindieron durante dos meses de su ordenador para que yo lo utilizara y pudiera redactar esta memoria con mayor rapidez y comodidad.

Bernardo de la Calle Ysern  
Madrid, diciembre de 1999

# Contenidos

<i>Capítulo I Introducción</i>	1
§ I.1 Aproximantes de Padé .....	1
§ I.2 Propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales .....	9
§ I.3 Medidas variantes .....	13
§ I.4 Contenido y estructura de este trabajo .....	15
<i>Capítulo II Medidas variantes positivas</i>	17
§ II.1 Introducción. ....	17
§ II.2 Condiciones de admisibilidad .....	18
§ II.3 Convergencia débil* .....	22
§ II.4 Convergencia débil y del cociente en la circunferencia .....	27
§ II.5 Convergencia débil y del cociente en la recta real .....	32
§ II.6 Convergencia fuerte o de Szegő.....	41
§ II.7 Algunos ejemplos .....	47
§ II.8 Convergencia relativa*.....	51
<i>Capítulo III Medidas variantes reales asociadas con polinomios de Stieltjes</i>	59
§ III.1 Introducción. ....	59
§ III.2 Polinomios de Stieltjes variantes.....	63
§ III.3 Teoría del potencial logarítmico .....	68
§ III.4 Convergencia de los polinomios de Stieltjes .....	77
§ III.5 Un ejemplo .....	84



## Contenidos

---

<i>Capítulo IV Aproximantes de Padé simultáneos</i>	89
§ IV.1 Introducción .....	89
§ IV.2 Sistemas de Nikishin .....	92
§ IV.3 Propiedades asintóticas .....	97
 <i>Capítulo V Aproximantes multipuntuales de Padé con polos fijos</i>	105
§ V.1 Introducción .....	105
§ V.2 Aproximación de funciones de Markov .....	108
§ V.3 Fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod .....	111
§ V.4 Funciones meromorfas tipo Markov .....	115
§ V.5 Resultados auxiliares .....	117
§ V.6 Aproximación de funciones de Markov meromorfas .....	122
 <i>Epílogo</i> .....	133
 <i>Bibliografía</i> .....	137

# Capítulo I

## Introducción

### § I.1 Aproximantes de Padé

Sea

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \quad (1.1)$$

una función analítica en un entorno de  $z = 0$ . Para cada  $n$  y  $m$ ,  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , es conocido que existen polinomios  $p_n$  y  $q_m$  que cumplen

- $\text{gr}(p_n) \leq n$ ,  $\text{gr}(q_m) \leq m$ ,  $q_m \not\equiv 0$ .
- $q_m(z) f(z) - p_n(z) = \mathcal{O}(z^{n+m+1})$ ,  $z \rightarrow 0$ .

Para hallar  $q_m$  debemos considerar el desarrollo en serie de potencias de  $q_m f$  e igualar a cero los coeficientes de  $z^{n+k}$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Se tiene entonces un sistema homogéneo de  $m$  ecuaciones y  $m+1$  incógnitas por lo que siempre existe una solución no trivial. Una vez hallado  $q_m$ , el polinomio  $p_n$  es el polinomio de grado menor o igual que  $n$  formado por los  $n+1$  primeros términos del desarrollo en serie de potencias de  $q_m f$ . Esta construcción define una única función racional (después de simplificar posibles factores comunes)  $R_{n,m}(f) = p_n/q_m$  llamada el APROXIMANTE DE PADÉ de tipo  $(n, m)$  de la función  $f$ . El conjunto de fracciones  $\{R_{n,m}(f)\}_{n,m=0}^{\infty}$  constituye la TABLA DE PADÉ de la función  $f$ . La fila  $m$ -ésima de la tabla de Padé está

formada por  $\{R_{n,m}(f)\}_{n=0}^{\infty}$  y la diagonal principal por las funciones  $\{R_{n,n}(f)\}_{n=0}^{\infty}$ ; usualmente, en este caso, se suelen denotar por  $R_n(f)$ .

Estos aproximantes racionales deben su nombre al matemático francés Henri Padé (1863 – 1953) en cuya tesis [86] aparecen estos conceptos en relación con las fracciones continuas. Entre otros resultados, Padé encuentra una fórmula explícita de los aproximantes  $R_{n,m}$  de la función exponencial y prueba que convergen uniformemente en compactos del plano complejo  $\mathbb{C}$  a  $e^z$  (cf. [87]), además demuestra que la tabla de Padé de  $e^z$  es normal, es decir, que cada fracción  $R_{n,m}$  aparece una sola vez en dicha tabla. No fue, sin embargo, H. Padé el primer matemático que estudió este tipo de funciones racionales. Por ejemplo, Hermite (1873) ya conocía las expresiones explícitas de  $R_{n,m}$  para la función exponencial que le sirvieron para probar la trascendencia del número  $e$ . Jacobi (1845) dio la fórmula del denominador  $q_m(x)$  como un determinante cuyas entradas son los coeficientes  $a_i$  además de las potencias de la variable  $x$  y Frobenius (1881) encontró relaciones (las así llamadas identidades de Frobenius) entre los denominadores de fracciones  $R_{n,m}$  “cercanas” en la tabla de Padé.

Si se define  $\mathcal{R}_{n,m}$  como la clase de todas las funciones racionales cuyos numerador y denominador tienen grado a lo sumo  $n$  y  $m$  respectivamente, es también posible definir el aproximante  $R_{n,m}(f)$  como el elemento perteneciente a  $\mathcal{R}_{n,m}$  que tiene mayor orden de contacto (dentro de la clase de dichas funciones) con la función  $f$  en el punto  $z = 0$ . Desde este punto de vista, los aproximantes de Padé son una extensión de los polinomios de Taylor pero, a diferencia de éstos, no es cierto, en general, que converjan a  $f$  en un entorno de  $z = 0$ . En realidad, hay grandes diferencias en el comportamiento de los dos tipos de aproximantes.

Por un lado, la presencia de polos permite aproximar de manera más eficaz una amplia variedad de funciones: consideremos, a modo de ejemplo, la función  $f(z) = \log(1 + z)$ ; el radio de convergencia de su serie de Taylor en  $z = 0$  es 1 como es bien sabido. De resultados que se citan más adelante puede deducirse que los aproximantes de Padé  $R_{n,n}$  de  $\log(1 + z)$ ,  $\log 1 = 0$ , convergen a  $\log(1 + z)$  uniformemente en compactos del dominio  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ . Debido a este hecho, que ocurre en muchos otros casos, se entendió que los aproximantes de Padé

proporcionaban un método para reconstruir la función a partir de sus coeficientes de Taylor.

Por otro lado, la misma presencia de polos puede resultar ser un obstáculo para la convergencia: se conocen ejemplos de funciones enteras cuyos aproximantes de Padé divergen en todo los puntos del plano complejo  $\mathbb{C}$  menos en  $z = 0$  (véase [119]). A. A. Gonchar [45] ha probado que, en circunstancias bastante generales, los aproximantes diagonales de Padé convergen en aquellas regiones que no contienen polos de los aproximantes, por lo que el “mal” comportamiento es causado por la presencia no deseada de polos lejos de los puntos singulares de la función  $f$ . Estos polos son llamados espurios (para más detalles y una definición más precisa, véase [107]) y están siendo objeto de estudio en la actualidad. Por regla general van emparejados con ceros cercanos del propio aproximante de Padé.

Como consecuencia de lo anterior, no es sencillo obtener resultados sobre la convergencia de los aproximantes de Padé. Hablaremos a continuación de tres teoremas clásicos sobre convergencia y su desarrollo posterior hasta la actualidad, lo que servirá para mostrar una breve panorámica de los problemas viejos y nuevos en este campo de la matemática. A finales del siglo XIX, R. F. Bernard, vizconde de Montessus de Ballore, demuestra [76] el siguiente

**Teorema (de Montessus de Ballore)** *Sea  $f$  una función analítica en un entorno de  $z = 0$  y meromorfa con exactamente  $m$  polos (contando la multiplicidad) en el disco  $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ . Entonces, se cumple*

- *Para todo número natural  $n$  suficientemente grande,  $R_{n,m}(f)$  tiene  $m$  polos.*
- *Los polos de  $R_{n,m}(f)$  tienden, cuando  $n$  tiende a infinito, a los polos de  $f$  en  $U_r$ .*
- *$R_{n,m}(f)$  converge, cuando  $n$  tiende a infinito, a  $f$  uniformemente en compactos de la región  $U_r \setminus \{\text{polos de } f\}$ .*

A partir de la década de los años setenta se realizaron nuevos progresos en la convergencia de las filas de los aproximantes de Padé. E. B. Saff [99] demostró una

generalización del teorema anterior usando aproximantes multipuntuales. Resultados análogos para las funciones racionales de mejor aproximación se encuentran en [98] y [41]. Pero, quizás, los resultados modernos más interesantes en este tema se encuadran dentro del llamado tipo inverso. El teorema de Montessus es un ejemplo de problema de tipo directo, es decir, dada la función  $f$  en (1.1) y conocidas algunas propiedades globales de su extensión analítica tales como su dominio de meromorfía, número de polos en esta región, etc..., se trata de averiguar si los aproximantes de Padé convergen a la función  $f$ . Un problema de tipo inverso puede ser planteado del siguiente modo: supongamos conocido el comportamiento de los polos de alguna sucesión de aproximantes de Padé, ¿qué puede decirse acerca de las singularidades de  $f$ ?, ¿se corresponden los polos de  $f$  con los puntos límite de los polos de los aproximantes?. Desde luego, la respuesta a estas preguntas tiene gran importancia práctica. En el trabajo [44] Gonchar prueba que los polos de  $f$  en el disco de  $m$ -meromorfía (el mayor disco en el cual  $f$  admite extensión meromorfa con  $m$  polos a lo sumo,  $D_m$  en lo que sigue) son los puntos límite, cuando  $n$  tiende a infinito, de los polos de los aproximantes  $R_{n,m}(f)$  que convergen con velocidad geométrica. Además caracteriza la multiplicidad de los polos de  $f$  y el radio de  $D_m$  utilizando los polos de los aproximantes. Pocos años más tarde, S. P. Suetin demuestra que los puntos límite de los polos de  $R_{n,m}(f)$  que están en el interior de  $D_m$  son polos de  $f$  (independientemente de la velocidad de convergencia) y que sobre la frontera de  $D_m$  corresponden a puntos singulares de la función  $f$  (cf. [111] y [112]).

El siguiente teorema tiene que ver con la aproximación de funciones del tipo

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z - x},$$

donde  $\mu$  es una medida de Borel finita positiva cuyo soporte, denotado por  $S(\mu)$ , es un subconjunto compacto de la recta real  $\mathbb{R}$ . La función  $\hat{\mu}$  recibe el nombre de FUNCIÓN DE MARKOV y está definida y es holomorfa en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$ . Puesto que es posible que  $\hat{\mu}$  no sea analítica en un entorno de  $z = 0$ , resulta más conveniente considerar aproximantes de Padé que tengan orden de contacto con  $\hat{\mu}$  en  $z = \infty$ , los cuales no difieren, en lo esencial, de los definidos anteriormente. Para ello,



consideramos el desarrollo de  $\hat{\mu}$  en potencias de  $1/z$ , es decir,

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}, \quad \text{donde } c_k = \int x^k d\mu(x). \quad (1.2)$$

Dado un entero  $n$  no negativo existen polinomios  $p_n$  y  $q_n$ , de grado a lo sumo  $n$ , tales que  $q_n \not\equiv 0$  y

$$(q_n \hat{\mu} - p_n)(z) = \mathcal{O}(1/z^{n+1}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

El cociente  $p_n/q_n$  de cualquier par de estos polinomios define una única función racional  $R_n(\hat{\mu})$  llamada el  $n$ -ésimo APROXIMANTE DE PADÉ (diagonal) de  $\hat{\mu}$ . Como antes, hallar  $q_n$  es equivalente a encontrar una solución no trivial de un sistema homogéneo con  $n+1$  incógnitas y  $n$  ecuaciones, donde la matriz de los coeficientes es la matriz de Hankel correspondiente a los números  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ . El polinomio  $p_n$  se obtiene tomando la parte polinomial del desarrollo de  $q_n \hat{\mu}$  en potencias de  $1/z$ .

En 1895 A. A. Markov [67] demuestra (véase también [81], capítulo 3, teorema 6.1)

**Teorema (Markov)** *La sucesión  $\{R_n(\hat{\mu})\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $\hat{\mu}$  en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ , donde  $\text{Co}(S(\mu))$  es la envoltura convexa de  $S(\mu)$ .*

Desde entonces se han probado varias generalizaciones de este teorema. En [46] se demuestra un teorema del mismo tipo utilizando aproximantes multipuntuales, en [4], [21] y [22] aparecen varios resultados relacionados donde parte de los polos de los aproximantes se fijan de antemano. Gonchar [42] y Rakhmanov [91] extendieron el teorema de Markov al caso en que se añada a la función de Markov una función racional, con lo que la función resultante tiene polos fuera de  $S(\mu)$ . Para más detalles, puede verse el capítulo V donde se comentan estos resultados y se prueban algunos teoremas similares.

Si se analiza la construcción de los aproximantes de Padé de las funciones del tipo anterior, se observa que la existencia de los aproximantes no depende de que el desarrollo (1.2) defina realmente una función analítica en un entorno de  $z = \infty$ ,

lo que nos permite definir los aproximantes de Padé para cualquier serie formal en potencias de  $1/z$ . En particular, para las FUNCIONES DE STIELTJES, es decir, funciones del tipo

$$\hat{\tau}(z) = \int \frac{d\tau(x)}{z - x},$$

donde  $\tau$  una medida de Borel positiva con soporte contenido en  $[0, +\infty]$  y cuyos momentos  $d_k$ ,  $d_k = \int x^k d\tau(x)$ , son todos finitos. Evidentemente, una condición necesaria para la convergencia de  $R_n(\hat{\tau})$  a  $\hat{\tau}$ , para cualquier medida  $\tau$  del tipo considerado, es que la sucesión de momentos  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  determine  $\tau$ , es decir, que no haya dos medidas distintas con la misma sucesión de momentos  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Se dice en este caso que el problema de momentos para la sucesión  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es determinado. Del trabajo [109] de T. J. Stieltjes se deduce que esta condición es también suficiente para la convergencia de  $R_n(\hat{\tau})$  a  $\hat{\tau}$ .

**Teorema (Stieltjes)** *Si el problema de momentos para la sucesión  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es determinado, entonces la sucesión  $\{R_n(\hat{\tau})\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a la función  $\hat{\tau}$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$ .*

Más tarde, T. Carleman [26] probó que si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2k]{d_k}} = \infty,$$

entonces el problema de momentos es determinado. G. López [58] generalizó el teorema de Stieltjes para aproximantes multipuntuales imponiendo una condición tipo Carleman a los momentos. En [59] y [62] se resuelve un problema análogo al planteado por Gonchar [42] en el caso de las funciones de Markov: estudiar la convergencia de los aproximantes de Padé a funciones del tipo  $\hat{\tau} + r$ , donde  $r$  es una función racional. El trabajo originario de Stieltjes versa, en realidad, sobre la convergencia de fracciones continuas y el teorema citado aquí es un caso particular. Dentro de ese contexto más general, puede verse una extensión que permite que los momentos sean complejos en [12].

Hay resultados modernos (últimos treinta años) en la teoría de los aproximantes de Padé que se apartan de los resultados clásicos, tanto por su mayor generalidad

como por la naturaleza del tipo de convergencia que obtienen. Comentaremos brevemente estos trabajos (véase la sección § III.3 para las definiciones) cuyo denominador común es el uso de la teoría del potencial logarítmico. Uno de los más importantes es el siguiente teorema (cf. [83] y [90])

**Teorema (Nuttall-Pommerenke)** *Sea  $f$  analítica y univaluada en el dominio  $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$  donde  $F$  es conjunto compacto tal que  $\text{cap}(F) = 0$ . Entonces la sucesión diagonal de aproximantes de Padé de  $f$  converge a  $f$  en capacidad en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .*

Como ya se dijo al comienzo de esta sección existen ejemplos de funciones enteras cuyos aproximantes de Padé divergen en todo punto lo cual no contradice el resultado anterior pues la convergencia en capacidad es lo suficientemente débil como para permitir que los polos de los aproximantes tengan puntos límite dentro del dominio de convergencia. Así, desde el punto de vista de la aproximación uniforme, el teorema de Nuttall-Pommerenke puede parecer algo pobre, sin embargo, la convergencia en capacidad permite entender el comportamiento global de los aproximantes de Padé y, en ciertas ocasiones, si se tiene información adicional sobre los polos de los aproximantes, convergencia en capacidad implica convergencia uniforme (véase el lema de Gonchar enunciado en la sección § V.5). Se ha demostrado que la condición  $\text{cap}(F) = 0$  no se puede eliminar: Rakhmanov [92] probó que si para toda función analítica  $f$  en un dominio  $D$ ,  $\infty \in D$ , la sucesión diagonal de sus aproximantes de Padé converge a  $f$  en capacidad (en subconjuntos compactos de  $D$ ), entonces  $\text{cap}(\overline{\mathbb{C}} \setminus D) = 0$ . Quizás la contribución más importante al teorema de Nuttall-Pommerenke la realizó Gonchar [40] al extender el resultado a la clase  $R_0$  formada por las funciones que se aproximan rápidamente en capacidad por funciones racionales en el entorno de un punto. La clase  $R_0$  contiene todas las funciones a las que se aplica el teorema de Nuttall-Pommerenke y otras cualitativamente muy diferentes, pues pueden tener regiones de singularidad con capacidad positiva. Previamente, Gonchar [39] había probado, en el espíritu de obtener información global a partir de datos locales, que las funciones de la clase  $R_0$  son necesariamente univalueadas.

En el teorema de Nuttall-Pommerenke (y en la generalización de Gonchar) es

esencial que la función  $f$  sea univaluada. Si la función es multivaluada no puede esperarse convergencia en capacidad en todo  $\mathbb{C}$  pues los propios aproximantes de Padé son funciones univalueadas. En esta situación más compleja puede demostrarse convergencia en capacidad salvo en un conjunto de capacidad mínima determinado por la función  $f$  (cf. [85] y [105]).

Por otro lado, Baker [9] ha mostrado en muchos ejemplos relevantes (el ejemplo de Wallin [119], entre otros) que, si bien la sucesión diagonal de aproximantes de Padé puede diverger, existen subsucesiones uniformemente convergentes. De esta observación surge la famosa conjetura Baker-Gammel-Wills también llamada

**Conjetura de Padé** *Si la función  $f$  es analítica en el disco unidad  $U$ , entonces existe una subsucesión  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  tal que  $\{R_{n,n}(f)\}_{n \in \Lambda}$  converge a  $f$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $U$ .*

Poco se sabe sobre esta conjetura aunque la opinión mayoritaria es que es falsa, por lo que existen versiones debilitadas de ella, por ejemplo, exigiendo sólo convergencia en capacidad o limitándose al caso en que  $f$  es algebraica (para más detalles, véase [106]).

A lo largo de esta sección nos hemos centrado en las propiedades de convergencia de los aproximantes de Padé por ser uno de los principales temas de estudio de la presente memoria. Para más información, puede consultarse la monografía [10] donde, además de las propiedades asintóticas, se analizan las propiedades algebraicas, el problema del cómputo efectivo y las aplicaciones al cálculo numérico y a la física de dichos aproximantes.

Veamos, para finalizar, cómo surge la relación entre los aproximantes de Padé y los polinomios ortogonales. Por comodidad (si bien es posible razonar con más generalidad), supongamos que la función que se aproxima es una función de Markov. De la ecuación (1.3) se deduce que

$$z^k (q_n \hat{\mu} - p_n)(z) = \mathcal{O}(1/z^2), \quad z \rightarrow \infty; \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Sea  $\gamma$  una curva de Jordan analítica orientada positivamente que rodee el soporte

de la medida  $\mu$ . Si aplicamos el teorema de Cauchy “hacia afuera” obtenemos

$$0 = \int_{\gamma} z^k (q_n \hat{\mu} - p_n)(z) dz = \int_{\gamma} z^k q_n(z) \hat{\mu}(z) dz, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

y, por el teorema de Fubini y la fórmula integral de Cauchy, se tiene

$$0 = \int x^k q_n(x) d\mu(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.4)$$

De modo que el polinomio  $q_n$ , denominador del aproximante de Padé  $R_n$ , satisface relaciones de ortogonalidad con respecto a la medida  $\mu$ . Más aún, de la ecuación (1.3) también se deduce, utilizando la fórmula integral de Cauchy, que

$$(q_n \hat{\mu} - p_n)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q_n(\zeta) \hat{\mu}(\zeta) - p_n(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q_n(\zeta) \hat{\mu}(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta,$$

donde  $z$  pertenece a  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  y  $\gamma$  está suficientemente cercana a  $\text{Co}(S(\mu))$  para dejar “fuera” el punto  $z$ . Nuevamente utilizando el teorema de Fubini llegamos a la conocida fórmula de Hermite

$$\hat{\mu}(z) - R_n(\hat{\mu})(z) = \frac{1}{q_n(z)} \int \frac{q_n(x)}{z - x} d\mu(x), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu)). \quad (1.5)$$

De donde el comportamiento asintótico, cuando  $n$  tiende a infinito, de los polinomios ortogonales  $q_n$  adquiere vital importancia en el estudio de la convergencia de los aproximantes de Padé. En la próxima sección repasaremos los resultados más sobresalientes al respecto.

## § I.2 Propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales

Sea  $\mu$  una medida de Borel finita y positiva en  $\mathbb{R}$  cuyo soporte compacto  $S(\mu)$  contiene infinitos puntos. Sea  $\mu' = d\mu/dx$  la derivada de Radon-Nykodym de  $\mu$  con respecto a la medida de Lebesgue  $dx$ .

Sea  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida  $\mu$ ; es decir,  $p_n(z) = \kappa_n z^n + \dots$ ,  $\kappa_n > 0$ , y

$$\int_{-1}^1 p_m(x) p_k(x) \mu(x) dx = \delta_{km}. \quad (1.6)$$

Una clase importante de medidas es la de las medidas regulares. Esta clase de medidas ha sido introducida recientemente y estudiada en detalle. La excelente monografía [108] de H. Stahl y V. Totik está dedicada al estudio de estas medidas y sus polinomios ortogonales. Se dice que la medida  $\mu$  es REGULAR y se escribe  $\mu \in \mathbf{Reg}$  si se verifica una cualquiera de las siguientes dos relaciones equivalentes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n^{1/n} = \frac{1}{\text{cap}(S(\mu))}, \quad (1.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n(z)|^{1/n} = \exp\{g_\Omega(z, \infty)\}, \quad (1.8)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus Co(S(\mu))$ , donde  $\text{cap}(S(\mu))$  denota la capacidad logarítmica de  $S(\mu)$  y  $g_\Omega(z, \infty)$  es la función de Green con singularidad en el infinito relativa a la región  $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$  (cf. la sección § III.3 para la definición de estos conceptos). Por ejemplo, si  $S(\mu) = [-1, 1]$  entonces las fórmulas anteriores se escriben del siguiente modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n^{1/n} = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n(z)|^{1/n} = |z + \sqrt{z^2 - 1}|.$$

Para la definición detallada de medida regular (en un contexto más general) y formas equivalentes de su expresión véase el teorema 3.1.1 de [108].

La CLASE DE NEVAI-BLUMENTHAL es también de importancia en la teoría de polinomios ortogonales y temas relacionados. Sea

$$x p_n(x) = a_{n+1} p_{n+1} + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

la relación de recurrencia a tres términos satisfecha por la sucesión de polinomios ortonormales  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Se dice que  $\mu \in M(a, b)$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a/2$ . En este caso es conocido el hecho de que  $S(\mu) = [b - a, b + a] \cup e$ , donde  $e$

es un conjunto, de cardinal a lo más numerable, cuyos únicos posibles puntos de acumulación son  $b \pm a$ . Supondremos que  $a \neq 0$  para que el intervalo  $[b - a, b + a]$  no quede reducido a un punto. Con estas condiciones se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)} = \Psi \left( \frac{z - b}{a} \right), \quad (1.9)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus S(\mu)$ , donde  $\Psi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ . La raíz se escoge de modo que sea positiva en  $\{z > 1\}$ . La clase de medidas  $M(a, b)$  también está relacionada con la convergencia débil de cierta sucesión de medidas. Concretamente, si  $g$  es una función acotada y continua en  $S(\mu)$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$  se verifica la siguiente relación asintótica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) p_n(x) p_{n+k}(x) d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{b-a}^{b+a} g(x) \frac{T_k(x)}{\sqrt{(b+a-x)(x-b+a)}} dx, \quad (1.10)$$

donde  $T_k$  es el polinomio de Chebychev de primera especie y grado  $k$ , es decir,  $T_k(\cos \theta) = \cos k\theta$ . Para conocer más detalles sobre este tipo de medidas y sus propiedades, puede consultarse [77]. Una condición suficiente bien conocida para que  $\mu \in M(a, b)$ , debida a E. A. Rakhmanov, es que  $S(\mu) = [b - a, b + a]$  y  $\mu' > 0$  en casi todo punto del intervalo  $[b - a, b + a]$ . El teorema de Rakhmanov ha sido objeto de gran atención desde su aparición como lo prueba el hecho de que se han proporcionado varias demostraciones distintas en un corto espacio de tiempo. Aparte de la demostración original [93], podemos citar las que aparecen en [70], [95] y [78].

Finalmente, consideremos la CLASE DE MEDIDAS DE SZEGŐ. A fin de no complicar la notación, nos limitamos a medidas cuyo soporte es  $[-1, 1]$ . Se dice que  $\mu \in \mathbf{S}$  si  $S(\mu) = [-1, 1]$  y  $\log \mu'(x)/\sqrt{1-x^2} \in L^1[-1, 1]$ . En este caso se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n(z)}{\Psi(z)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S(\mu'(\cos \theta) |\sin(\theta)|; \Psi(z)), \quad (1.11)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ , donde (siempre que  $h$  cumpla  $\log h \in L^1[0, 2\pi]$ )

$$S(h; z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log h(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right\}, \quad |z| > 1$$

es la función de Szegő.

Dentro de esta clase de medidas se ha demostrado uno de los pocos resultados sobre convergencia de los polinomios ortogonales en casi todo punto del soporte de la medida (cf. [73]).

Estos tres tipos de comportamiento asintótico (raíz  $n$ -ésima, cociente, de Szegő) están ordenados jerárquicamente: la convergencia de la raíz  $n$ -ésima es la más débil, pero para muchas aplicaciones es suficiente. Por ejemplo, determina las curvas en las que los ceros de los polinomios ortogonales son densos y la densidad de la distribución de los mismos. Así mismo, permite demostrar convergencia de los aproximantes de Padé correspondientes, al menos en capacidad. La convergencia del cociente proporciona una descripción más precisa del comportamiento asintótico; problemas como la aproximación de funciones meromorfas de Markov y de Stieljes se han resuelto con su ayuda (cf. [42] y [62]). Está relacionada, como hemos visto, con la existencia del límite de los coeficientes de la relación de recurrencia. Esta conexión se ha utilizado en la teoría espectral de operadores diferenciales. Por otro lado, el teorema de Rakhmanov muestra que una clase muy amplia de polinomios ortogonales verifica este tipo de comportamiento límite. La convergencia fuerte o de Szegő corresponde a la situación donde se posee un conocimiento más exacto de los valores de los polinomios ortogonales cuando  $n$  tiende a infinito. Por ejemplo, en el caso de polinomios ortogonales sobre la circunferencia la clase de medidas regulares no aporta información sobre la distribución asintótica de los ceros; el conocimiento de la extensión analítica de la función de Szegő puede suplir en parte esta carencia (véase [79] y [68]). Si  $S(\mu) \subset \mathbb{R}$  es posible dar estimaciones precisas de la localización de los ceros sobre el soporte de la medida añadiendo alguna condición tipo Lipschitz sobre la medida.



En las referencias [36], [52], [77], [81], [108], [113], [115] y [116] se pueden encontrar estos resultados junto con más información sobre los polinomios ortogonales y su relación con otros temas. Si bien pueden considerarse referencias generales, cada una tiene su carácter propio al destacar aspectos diferentes de esta materia.

## § I.3 Medidas variantes

Al final de la sección § I.1 se mostró cómo el denominador del aproximante de Padé de una función de Markov es un polinomio ortogonal con respecto a la medida que define dicha función. Ésta es la situación más sencilla. En la práctica, aparecen otros tipos de situaciones si bien todas ellas tienen la ortogonalidad como rasgo común. La clase de ortogonalidad que surge depende del problema que se plantee. A lo largo de los próximos capítulos se verá con detalle qué ocurre en el caso de problemas de aproximación simultánea de un conjunto de funciones, de aproximación multipuntual y de aproximación en la que se fija de antemano parte de los polos. Con el propósito de motivar el objeto de estudio de gran parte de este trabajo, daremos aquí un ejemplo significativo de los diversos tipos de ortogonalidad que pueden aparecer. Hemos escogido un problema de aproximación ya resuelto (véase [62]) y diferente (aunque con puntos de contacto con la última parte del capítulo V) de los que se tratan en esta memoria para mostrar la gran riqueza de situaciones posibles y con el fin de no reiterar argumentos.

Consideremos el problema de estudiar la convergencia de los aproximantes diagonales de Padé de la función  $\hat{r}(z) + r(z)$ , donde  $\hat{r}$  es una función de Stieltjes y  $r$  es una función racional (con coeficientes complejos) con polos fuera del intervalo  $[0, +\infty]$ . Haciendo un cambio en la variable por medio de una transformación de Möbius podemos trasladar el problema al estudio de la convergencia de los aproximantes de Padé  $R_{n-1,n}(f)$  (construidos para que tengan orden de contacto con  $f$  en  $z = 1$ , que es el punto transformado de  $z = \infty$  por la homografía) de la función

$$f(z) = \hat{\mu}(z) + s(z),$$

donde  $\mu$  es una medida positiva cuyo soporte está contenido en el intervalo  $[-1, 1]$  y  $s$  es una función racional con polos fuera de  $[-1, 1]$ . Ahora el intervalo de integración es

acotado pero nótese que no es un problema de aproximación de funciones de Markov (con independencia de  $s$ ) pues la interpolación se realiza en  $z = 1$ . Puede probarse que el denominador de  $R_{n-1,n}(f)$ , que denotamos por  $q_n$ , satisface las relaciones de ortogonalidad siguientes

$$0 = \int_{-1}^1 x^j q_n(x) t(x) \frac{d\mu(x)}{(1-x)^{2n}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1-d, \quad (1.12)$$

donde  $t$ ,  $\text{gr } t = d$ , es el denominador de  $s$ . Es interesante observar que  $q_n$  es ortogonal con respecto a una medida  $d\mu_n$ ,  $d\mu_n(x) = t(x) d\mu(x) (1-x)^{-2n}$ , que depende de  $n$ ; a este tipo de medidas las llamaremos VARIANTES. Además, las relaciones de ortogonalidad no son completas a causa del término  $-d$  y la medida no es necesariamente positiva. Para superar estos inconvenientes, comparamos  $q_n$  con el polinomio  $l_{n,m}$  determinado por las condiciones

$$0 = \int_{-1}^1 x^j l_{n,m}(x) \frac{d\mu(x)}{(1-x)^{2n}}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Debido a las ecuaciones (1.12) el polinomio  $q_n t$  se representa como combinación lineal de los polinomios  $\{l_{n,n+k}\}_{k=-d}^d$ . Si  $\mu' > 0$  en casi todo punto de  $[-1, 1]$  y la medida variante  $d\mu(x) (1-x)^{-2n}$  verifica cierta condición tipo Carleman entonces los polinomios ortogonales variantes  $l_{n,m}$  cumplen (éste es el paso clave) la relación asintótica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n,n+k+1}}{l_{n,n+k}} = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.13)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . De aquí es posible deducir que los polinomios  $q_n$  tienen como mucho  $d$  ceros fuera del intervalo  $[-1, 1]$  y probar que  $R_{n-1,n}(f)$  converge a  $f$  en capacidad. En estas condiciones se obtiene de modo inmediato la convergencia uniforme aplicando un conocido lema de Gonchar (véase la sección § V.5).

En resumen, el hecho de que ciertos polinomios ortogonales variantes tengan un comportamiento asintótico determinado (convergencia del cociente en (1.13)) ha permitido resolver un problema de aproximación Padé de funciones de Stieltjes meromorfas. Veremos que este principio funciona en una clase amplia de problemas.

## § I.4 Contenido y estructura de este trabajo

El objetivo de esta memoria es extender los resultados conocidos sobre comportamiento asintótico de polinomios ortogonales con respecto a medidas variantes y utilizarlos para resolver diversos problemas de la teoría de la aproximación racional de funciones analíticas.

Cada capítulo (incluso alguna sección) contiene una introducción donde se explican con detalle los contenidos correspondientes. De modo que nos limitaremos aquí a hacer un breve sumario de los temas tratados. En el capítulo II se estudian las propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales con respecto a medidas variantes positivas. El principal rasgo diferenciador con respecto a resultados anteriores es su generalidad para el tipo de convergencia estudiado. Todo el capítulo descansa sobre el teorema 2.1 de la sección § II.3, para cuya demostración es necesario delimitar con cuidado las hipótesis que se exigen; estas hipótesis son las condiciones de admisibilidad que se introducen en la sección § II.2. Las secciones § II.4 y § II.5 están dedicadas a probar un teorema del tipo Rakhmanov, primero en la circunferencia unidad y luego en la recta real, para llegar a la fórmula asintótica que se presenta en el teorema 2.9, objetivo final de la primera parte del capítulo. Las secciones § II.6 y § II.8 contienen resultados sobre otros tipos de relaciones asintóticas como son la de Szegő y su extensión: la convergencia comparativa. Por último, la sección § II.7 discute, a través de algunos ejemplos, las hipótesis pedidas en algunos resultados anteriores.

El capítulo III está dedicado al estudio de los polinomios de Stieltjes y su comportamiento asintótico. Tras una breve introducción, el capítulo comienza con una sección donde se definen los polinomios de Stieltjes variantes y se demuestran sus propiedades más importantes; entre ellas, la más destacada es una expresión integral que relaciona los polinomios de Stieltjes y las funciones de segunda clase, que resultará ser un elemento clave en las demostraciones posteriores. En § III.3 se repasan los conceptos y resultados más importantes de la teoría del potencial logarítmico que serán utilizados con frecuencia en adelante. El teorema 3.15 de § III.4 muestra cuál es el comportamiento asintótico de la raíz  $n$ -ésima de los polinomios de Stieltjes y constituye el resultado principal del capítulo, tras el que se obtienen algunos otros

teoremas y resultados relacionados. La última sección proporciona un ejemplo de que el teorema 3.15 no se puede mejorar.

Los resultados de las secciones § II.5 y § II.6 se aplican, en el capítulo IV, para obtener información sobre los denominadores de los aproximantes Hermite-Padé de un sistema de Nikishin de funciones; el resultado principal es el teorema 4.19. Previamente, en la sección § IV.2 se definen estos aproximantes y se detallan alguna relaciones de ortogonalidad que satisfacen tomadas de [51].

El último capítulo se puede dividir en dos partes diferenciadas. En la primera, secciones § V.2 y § V.3, se aplican los teoremas obtenidos en el capítulo III, relativos a la convergencia de los polinomios de Stieltjes, a la resolución de un problema de aproximación multipuntual tipo Padé de funciones de Markov y la deducción de un resultado sobre la convergencia de la fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod para funciones analíticas. En las tres últimas secciones se aborda un problema similar al anterior en el caso de funciones de Markov meromorfas en cuya resolución se utilizan los resultados auxiliares de la sección § V.5 y elementos de la teoría del potencial logarítmico.

Los resultados principales del capítulo II, salvo las tres últimas secciones, junto con casi todo el capítulo IV se pueden encontrar en [24]. El resto de estos dos capítulos constituye [23]. Todo el capítulo III, dedicado a los polinomios de Stieltjes, junto con sus aplicaciones (las tres primeras secciones del capítulo V) aparece en [14]. Por último, la parte del capítulo V que trata sobre las funciones de Markov meromorfas puede verse en [25].

Como principio general las aportaciones originales de la tesis van numeradas. El primer número corresponde al capítulo en que se encuentra el resultado y el segundo es el número de orden dentro de la misma categoría. Así el teorema 2.3 se encuentra en el capítulo II y es el tercer teorema original del presente trabajo. Los resultados conocidos y que se pueden encontrar en la bibliografía no irán numerados. Las definiciones ya utilizadas comúnmente en la literatura aparecerán RESALTADAS.

## Capítulo II

# Medidas variantes positivas

### § II.1 Introducción.

Sea  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , una sucesión de polinomios mónicos,  $\text{gr } p_n = n$ , y sea  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de medidas de Borel finitas y positivas, cuyos soportes  $S(\mu_n)$  son conjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . Se dice que la sucesión de polinomios es ORTOGONAL CON RESPECTO A LA SUCESIÓN DE MEDIDAS VARIANTES si

$$0 = \int \bar{z}^\nu p_n(z) d\mu_n(z) \quad , \quad \nu = 0, \dots, n-1 \quad .$$

Obsérvese que el  $n$ -ésimo polinomio  $p_n$  sólo satisface relaciones de ortogonalidad con respecto a la  $n$ -ésima medida variante  $\mu_n$ . Como se dijo en el capítulo introductorio, la necesidad de encontrar relaciones asintóticas en este tipo de polinomios surge de modo inmediato en el estudio de multitud de problemas en la teoría de la aproximación racional.

Hasta ahora, la mayor parte de las aplicaciones están relacionadas con medidas variantes del tipo  $d\mu_n = d\mu/w_n$ , donde  $\mu$  es una medida fija y  $w_n$  es un polinomio. Los problemas de interpolación racional son un ejemplo significativo, aunque no el único. Los ceros de  $w_n$  son los puntos de interpolación a partir de los cuales se construye la función racional. Véase, por ejemplo, [19], [46], [60] y [63]. También surgen estos tipos de medidas variantes al tratar problemas donde el soporte de las medidas no está acotado (aproximación de funciones de Stieltjes). El problema se reduce a uno con soporte acotado mediante un cambio de variable, apareciendo



así dichas medidas variantes, véase [62]. Este método se puede aplicar a otros tipos de soporte, como en [15]. Además, en la teoría de aproximación, hay planteadas otras cuestiones donde la parte variante toma una expresión distinta, como en [18], [21] y [51].

Los resultados más generales que se han obtenido para polinomios ortogonales con respecto a medidas variantes tienen que ver con la convergencia de la raíz  $n$ -ésima y las medidas son del tipo  $d\mu_n(x) = f_n(x)d\mu(x)$ . Pueden verse estos resultados en [108], donde sólo se exige, básicamente, que la medida  $\mu$  sea regular ( $\mu \in \mathbf{Reg}$ ) y que exista  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{1/n}(x)$  uniformemente en  $S(\mu)$ . En [48] se prueba un resultado similar exigiendo que  $\mu' > 0$  en casi todo punto de  $S(\mu)$ , lo cual es una condición más fuerte que  $\mu \in \mathbf{Reg}$ , pero debilitando el tipo de convergencia de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$ . En todos estos casos, los resultados de convergencia de la raíz  $n$ -ésima son análogos a los conocidos en el caso que la medida permanece fija, ( $f_n \equiv 1$ ).

Muy distinta es la situación a la hora de considerar otras clases de relaciones asintóticas, como la convergencia del cociente de polinomios ortogonales, donde no se han obtenido resultados tan generales. El principal objetivo de este capítulo es extender la clase de ortogonalidad variante para la cual se cumplen resultados de convergencia débil sobre el soporte de las medidas y, a partir de ahí, derivar otras fórmulas asintóticas. En el capítulo IV se aplicarán estos resultados al estudio del comportamiento asintótico de los denominadores de los aproximantes Hermite-Padé de un sistema de Nikishin de funciones.

## § II.2 Condiciones de admisibilidad

Es necesario considerar primero polinomios ortogonales con respecto a medidas cuyo soporte esté contenido en la circunferencia unidad para, más adelante, obtener resultados análogos en la recta real. Veamos algunas definiciones previas.

Sean  $\rho_n$  y  $\rho$  medidas de Borel, finitas y positivas en  $[0, 2\pi]$ . Por  $\rho_n \xrightarrow{*} \rho$ ,  $n \rightarrow \infty$ , denotamos la CONVERGENCIA DÉBIL\* de  $\rho_n$  a  $\rho$  cuando  $n$  tiende a infinito. Es decir,

para toda función  $2\pi$ -periódica  $f$ , continua en  $[0, 2\pi]$ , se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\rho_n(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\rho(\theta).$$

Sea  $\rho$  una medida de Borel compleja y regular en  $[0, 2\pi]$  (en un sentido diferente al definido en la sección § I.2; aquí regular significa que la medida de cualquier conjunto de Borel  $B \subset [0, 2\pi]$  es el supremo de las medidas de los conjuntos compactos de  $[0, 2\pi]$  contenidos en  $B$  y el ínfimo de las medidas de los conjuntos abiertos de  $[0, 2\pi]$  que contienen a  $B$ ). La NORMA de  $\rho$  se define como

$$\|\rho\| = |\rho|([0, 2\pi]),$$

donde  $|\rho|$  denota la medida positiva dada por la variación total de  $\rho$ . Esta aplicación define una norma en el espacio de todas las medidas de Borel complejas y regulares. Una sucesión de medidas de Borel complejas regulares  $\{\rho_n\}$  se dice que converge en norma a  $\rho$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n - \rho\| = 0.$$

Es bien sabido que todas las medidas de Borel finitas y positivas son regulares, por lo que este tipo de convergencia se aplica también a las medidas que estamos manejando (pueden verse estos conceptos y resultados en [97], por ejemplo).

Sea  $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de medidas de Borel finitas y positivas en el intervalo  $[0, 2\pi]$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  el soporte de  $\rho_n$  contiene un número infinito de puntos. Siempre que lo estimemos conveniente utilizaremos la notación diferencial para las medidas. Por  $d\theta/2\pi$  denotamos la medida de Lebesgue en  $[0, 2\pi]$ , y por  $\rho'_n = 2\pi d\rho_n/d\theta$  la derivada de Radon-Nykodym de  $d\rho_n$  con respecto a  $d\theta/2\pi$ . Por  $\mathbb{N}$  (respectivamente  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) denotamos el conjunto de números naturales (resp. enteros, reales, complejos).

Sea  $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de polinomios tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n$  tiene grado  $n$  y todos sus ceros  $\{w_{n,i}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , pertenecen al disco unidad cerrado. Suponemos que los índices se toman de tal manera que si  $w = 0$  es un cero de  $W_n$  de multiplicidad  $m$  entonces  $w_{n,1} = w_{n,2} = \dots = w_{n,m} = 0$ . Consideramos

$$d\sigma_n(\theta) = \frac{d\rho_n(\theta)}{|W_n(z)|^2}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Es necesario, para llegar a algún resultado concreto, establecer cierto tipo de conexión entre las medidas  $\rho_n$  y, a su vez, entre éstas y los polinomios  $W_n$ . A estas relaciones las llamaremos condiciones de admisibilidad.

**Definición 2.1** *Fijemos un número entero  $k \in \mathbb{Z}$ . Se dice que la terna  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es admisible en  $[0, 2\pi]$  si:*

(i) *Existe una medida de Borel  $\rho$  finita y positiva en el intervalo  $[0, 2\pi]$  tal que  $\rho_n \xrightarrow{*} \rho, n \rightarrow \infty$ .*

(ii)  $\|d\sigma_n\| = \int_0^{2\pi} d\sigma_n(\theta) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$ .

(iii)  $\int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{-k} |z - w_{n,i}|^{-2} d\rho_n(\theta) \leq M < +\infty, z = e^{i\theta}, n \in \mathbb{N}$  (esta condición sólo se aplica en el caso que  $k$  sea un número entero negativo).

(iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (1 - |w_{n,i}|) = +\infty$ .

Una conexión más fuerte se establece en la siguiente definición.

**Definición 2.2** *Fijemos un número entero  $k \in \mathbb{Z}$ . Se dice que la terna  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$  si es admisible y, además*

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\rho'_n(\theta) - \rho'(\theta)| d\theta = 0.$$

(ii)  $\rho' > 0$  en casi todo punto de  $[0, 2\pi]$ .

En [63] la definición de admisibilidad se presenta de manera análoga pero la parte  $d\rho_n$  de las medidas variantes no depende de  $n$ . Es claro que, en esa situación, las condiciones (i) en ambas definiciones dejan de tener relevancia alguna.



No es difícil probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n - \rho\| = 0$  implica (i) de las definiciones 2.1 y 2.2. La condición (ii) de admisibilidad garantiza que para cada par  $(n, m)$  de números naturales se puede contruir un POLINOMIO ORTONORMAL VARIANTE  $\varphi_{n,m}(z) = \alpha_{n,m}z^m + \dots$  que está unívocamente determinado por las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{z}^j \varphi_{n,m}(z) d\sigma_n(\theta) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad z = e^{i\theta},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_{n,m}(z)|^2 d\sigma_n(\theta) = 1, \quad \text{gr } \varphi_{n,m} = m, \quad \alpha_{n,m} > 0.$$

Sea  $\Phi_{n,m}(z) = z^m + \dots = (\alpha_{n,m})^{-1} \varphi_{n,m}(z)$  y consideremos el POLINOMIO RECÍPROCO  $\Phi_{n,m}^*(z) = z^m \overline{\Phi_{n,m}}(1/z)$ . Para cualquier sucesión de medidas de Borel positivas  $\{\sigma_n\}$  tal que  $\int_0^{2\pi} d\sigma_n(\theta) < +\infty, n \in \mathbb{N}$ , se cumplen las siguientes relaciones, que no son más que simples reformulaciones de resultados bien conocidos (obsérvese que  $n$  permanece fijo en cada fórmula).

$$\Phi_{n,m+1}(w) = w\Phi_{n,m}(w) + \Phi_{n,m+1}(0)\Phi_{n,m}^*(w), \quad (2.1)$$

$$\Phi_{n,m+1}^*(w) = \Phi_{n,m}^*(w) + \overline{\Phi_{n,m+1}(0)}w\Phi_{n,m}(w), \quad (2.2)$$

$$(\alpha_{n,m+1})^2 = (\alpha_{n,m})^2 + |\varphi_{n,m+1}(0)|^2, \quad (2.3)$$

$$|\Phi_{n,m+1}(0)| \leq C \int_0^{2\pi} \left| \frac{|\varphi_{n,m}(z)|^2}{|\varphi_{n,m+1}(z)|^2} - 1 \right| d\theta, \quad z = e^{i\theta}, \quad (2.4)$$

donde  $C$  es una constante independiente de  $n$  y  $m$ . Puede consultarse la demostración de (2.1)-(2.3) en el capítulo 1 de [116], para la de (2.4) véase el teorema 2 en [70].

### § II.3 Convergencia débil\*

El siguiente teorema es la base de todos los razonamientos posteriores.

**Teorema 2.1** Sea  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  admisible en  $[0, 2\pi]$ , entonces

$$\frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta \xrightarrow{*} d\rho(\theta), \quad z = e^{i\theta}. \quad (2.5)$$

DEMOSTRACIÓN. En todo lo que sigue consideraremos que  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Haremos uso de las siguientes relaciones conocidas (fórmula de Geronimus)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^j \frac{1}{|\varphi_{n,m}(z)|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^j d\sigma_n(\theta), \quad |j| \leq m$$

(véase el teorema 2.2 en el capítulo V de [36]). Por tanto, para cada polinomio trigonométrico  $T_m$  de grado menor o igual que  $m$ , tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T_m(\theta)}{|\varphi_{n,m}(z)|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_m(\theta) d\sigma_n(\theta). \quad (2.6)$$

Sea  $A_n(z) = \prod_{i=1}^{-k} (z - w_{n,i})$  si  $k = -1, -2, \dots$ ; para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tomamos  $A_n(z) \equiv 1$ . De (2.6) y del apartado (iii) de la definición de admisibilidad se deduce

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|A_n(z)|^2} \frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\rho_n(\theta)}{|A_n(z)|^2} \leq M_1 < +\infty, \quad (2.7)$$

donde  $M_1 = \max(M, \sigma[0, 2\pi])$ . Utilizando (2.7) se llega a que las sucesiones de medidas

$$\left\{ \frac{1}{|A_n(z)|^2} \frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{d\rho_n(\theta)}{|A_n(z)|^2} \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

están acotadas en norma. Por tanto, para probar que

$$dh_n(\theta) = \frac{1}{|A_n(z)|^2} \left( \frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta - d\rho_n(\theta) \right) \xrightarrow{*} 0,$$

es suficiente demostrar que cualquier subsucesión convergente  $\{dh_n\}$ ,  $n \in \Gamma$ ,  $\Gamma \subset \mathbb{N}$ , de tales medidas tiende a cero.

Consideremos la función

$$e_n(w) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{z-w} dh_n(\theta), \quad |w| < 1.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_n(w)$  pertenece a la clase de Nevanlinna. En efecto, denotemos

$$\hat{\beta}_n(w) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{z-w} \frac{1}{|A_n(z)|^2} \frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta,$$

$$\hat{\rho}_n(w) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{z-w} \frac{d\rho_n(\theta)}{|A_n(z)|^2}.$$

Es fácil ver que

$$-\frac{\pi}{2} < \arg \hat{\beta}_n(w) < \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arg \hat{\rho}_n(w) < \frac{\pi}{2},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pero

$$\ln^+ |a| \leq \frac{|a|^\delta}{\delta} \leq \frac{\operatorname{Re}(a^\delta)}{\delta \cos(\pi\delta/2)},$$

siempre que  $-\pi/2 < \arg a < \pi/2$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , donde  $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$ ,  $x > 0$ ,  $\delta \in (0, 1)$ . Así que fijados  $r, \delta \in (0, 1)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ln^+ |\hat{\beta}_n(re^{i\theta'})| d\theta' &\leq \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re}(\hat{\beta}_n(re^{i\theta'})^\delta)}{\delta \cos(\pi\delta/2)} d\theta' = \frac{\operatorname{Re}(\hat{\beta}_n(0)^\delta)}{\delta \cos(\pi\delta/2)} \\ &= \frac{\left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{|A_n(z)|^2} \frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta \right)^\delta}{\delta \cos(\pi\delta/2)} \leq \frac{(M_1)^\delta}{\delta \cos(\pi\delta/2)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Análogamente se prueba que

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |\hat{\rho}_n(re^{i\theta'})| d\theta' \leq \frac{\operatorname{Re}(\hat{\rho}_n(0)^\delta)}{\delta \cos(\pi\delta/2)} \leq \frac{(M_1)^\delta}{\delta \cos(\pi\delta/2)}. \quad (2.9)$$

De (2.8) y (2.9) se deduce

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |(\hat{\rho}_n - \hat{\beta}_n)(re^{i\theta'})| d\theta' \leq \frac{2(M_1)^\delta}{\delta \cos(\pi\delta/2)} < +\infty. \quad (2.10)$$

Por tanto, las funciones  $e_n(w)$  pertenecen a la clase de Nevanlinna (uniformemente con respecto a  $n$ ). Así (véase p. 16 de [27]),

$$e_n(w) = \frac{B_n(w)}{C_n(w)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde

$$\lim_{r \rightarrow 1} \max_{|w|=r} |B_n(w)| \leq 1, \quad \lim_{r \rightarrow 1} \max_{|w|=r} |C_n(w)| \leq 1, \quad (2.11)$$

y  $C_n(w) \neq 0$ ,  $|w| < 1$ . También

$$C_n(w) = \lim_{r \rightarrow 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |(\hat{\rho}_n - \hat{\beta}_n)(re^{i\theta'})| \frac{re^{i\theta'} + w}{re^{i\theta'} - w} d\theta' \right\}. \quad (2.12)$$

Sea  $\Gamma' \subset \Gamma \subset \mathbb{N}$  tal que

$$\lim_{n \in \Gamma'} B_n(w) = B(w) \quad \text{y} \quad \lim_{n \in \Gamma'} C_n(w) = C(w),$$

uniformemente en subconjuntos compactos del disco unidad abierto. Como, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n(w)$  nunca es cero en  $U = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ , entonces, o bien  $C(w) \equiv 0$  o bien  $C(w)$  nunca es cero en ese conjunto. Pero (véase (2.10) y (2.12))

$$\begin{aligned} \inf_{n \in \mathbb{N}} |C_n(0)| &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \sup_{n \in \mathbb{N}} \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |(\hat{\rho}_n - \hat{\beta}_n)(re^{i\theta'})| d\theta' \right\} \\ &\geq \exp \left\{ -\frac{(M_1)^\delta}{\pi \delta \cos(\pi \delta / 2)} \right\} > 0. \end{aligned}$$

Por tanto  $C(w)$  nunca vale cero en el disco unidad.

Probemos ahora que  $B(w) \equiv 0$  en  $U$ . Primero demostremos que  $\hat{\beta}_n$  interpola a  $\hat{\rho}_n$  en todos los ceros de  $W_n/A_n$  dentro de  $U$  según su multiplicidad. Sea  $w'$  un cero cualquiera de  $W_n/A_n$  en  $U$  de multiplicidad  $m > 0$ . Supongamos que  $w' \neq 0$ . De (2.6) se deduce

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|A_n(z)|^2} \frac{z}{(z-w)^j} \frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{z}{(z-w)^j} \frac{d\rho_n(\theta)}{|A_n(z)|^2}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Como

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{j=1}^m \frac{(w-w')^{j-1}}{(z-w')^j} + \frac{(w-w')^m}{(z-w')^m} \frac{1}{z-w},$$

es obvio que  $e_n(w)$  tiene un cero de multiplicidad  $m$  en  $w = w'$ . Por otra parte, si  $w' = 0$  es un cero de  $W_n/A_n$  de multiplicidad  $m$ , entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{z^j} \frac{1}{|A_n(z)|^2} \frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z^j} \frac{d\rho_n(\theta)}{|A_n(z)|^2}, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Como

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{j=1}^m \frac{w^{j-1}}{z^j} + \frac{w^m}{z^m} \frac{1}{z-w},$$

$e_n(w)$  tiene un cero de multiplicidad  $m$  en  $w = 0$ .

Consideremos la sucesión de funciones

$$H_n(w) = B_n(w) \prod \frac{1 - \bar{w}_{n,i}w}{w - w_{n,i}}, \quad n \in \Gamma',$$

donde  $\prod$  denota el producto de los factores cuyo índice  $i$  verifica que  $w_{n,i}$  es un cero de  $W_n/A_n$  de módulo menor que 1. Para todo  $n \in \Gamma'$ ,  $H_n(w)$  es analítica en  $U$ , y, usando el principio del máximo de las funciones analíticas al mismo tiempo que (2.11), llegamos a que  $|H_n(w)| \leq 1$ ,  $n \in \Gamma'$ , en  $U$ . De este modo

$$|B_n(w)| \leq \prod \frac{|w - w_{n,i}|}{|1 - \bar{w}_{n,i}w|}, \quad n \in \Gamma', \quad |w| < 1.$$

El segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero a causa del apartado (iv) de la condición de admisibilidad (véase p. 281 en [120]). Como  $A_n$  no contiene más que  $|k|$  ceros de  $W_n$ , éstos no tienen ninguna influencia en la divergencia del límite en (iv). Hemos probado que  $B(w) \equiv 0$  y  $C(w)$  nunca es cero en  $U$ , de donde,  $\lim_{n \in \Gamma'} e_n(w) = 0$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $U$ .

Ahora bien,

$$e_n(w) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{z-w} dh_n(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{z^i} dh_n(\theta) \right) w^i.$$

Así que, fijado  $i = 0, 1, \dots$ ,

$$\lim_{n \in \Gamma'} \int_0^{2\pi} \frac{1}{z^i} dh_n(\theta) = 0,$$

ya que  $\lim_{n \in \Gamma'} e_n(w) = 0$ . Se ha demostrado que  $dh_n \xrightarrow{*} 0$ ,  $n \in \Gamma$ . Luego

$$dh_n \xrightarrow{*} 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si  $k \in \mathbb{N}$ , entonces  $A_n \equiv 1$  y la demostración estaría terminada. Supongamos que  $k$  es un entero negativo. En este caso, como los ceros de  $A_n(z)$  están en  $\bar{U}$  y  $A_n$  es mónico, los coeficientes del polinomio trigonométrico

$$|A_n(z)|^2 = \sum_{i=k}^{-k} c_{n,i} z^i$$

están uniformemente acotados,

$$|c_{n,i}| \leq C_0, \quad |i| \leq |k|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para cualquier  $m \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$\int_0^{2\pi} z^m |A_n(z)|^2 dh_n(\theta) = \sum_{i=k}^{-k} c_{n,i} \int_0^{2\pi} z^{m+i} dh_n(\theta) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Usando este hecho y la convergencia débil\* de  $\rho_n$  a  $\rho$  obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} z^m \frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} z^m d\rho_n(\theta) = \int_0^{2\pi} z^m d\rho(\theta)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Así

$$\frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta \xrightarrow{*} d\rho(\theta), \quad n \in \mathbb{N},$$

como queríamos demostrar. □

En consecuencia, si todos los ceros de  $W_n$  se mantienen alejados de la frontera del disco unidad se cumple

**Corolario 2.1** Si  $|w_{n,j}| \leq C_1 < 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y  $d\rho_n \xrightarrow{*} d\rho$ , entonces

$$\frac{|W_n(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2} d\theta \xrightarrow{*} d\rho(\theta).$$

El apartado (iv) de la condición de admisibilidad impide que los ceros de la sucesión de polinomios  $\{W_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , puedan tender globalmente muy rápido a 1 en módulo. Si esto ocurre, todavía se puede demostrar (2.5) a condición de que la

medida  $\rho$  no concentre excesiva carga en los puntos de acumulación de los ceros de  $\{W_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , en  $U$ . Para probar el teorema 2.1 en esta situación más compleja se debe seguir el esquema que aparece en [62] en lugar del esquema de [63], que es el que se ha empleado en este trabajo.

## § II.4 Convergencia débil y del cociente en la circunferencia

En esta sección usaremos el resultado anterior para fortalecer el tipo de convergencia que verifican los polinomios  $\varphi_{n,n+k}$ . En el teorema 2.2 se realiza casi todo el trabajo necesario para demostrar un resultado análogo al teorema de Rakhmanov para medidas variantes.

**Teorema 2.2** *Si  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k+m}(z)|^2} - 1 \right| d\theta = 0, \quad (2.13)$$

*uniformemente en  $m \in \mathbb{N}_*$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Probaremos, en realidad, un enunciado más fuerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left( \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| - 1 \right)^2 d\theta = 0. \quad (2.14)$$

Los argumentos que seguiremos son parecidos a los empleados en la demostración del teorema 2.1 y del corolario 2.2 en [71]. Se cumple (véase (2.6))

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} - 1 \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right|^2 d\theta \\ &+ 2\pi - 2 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| d\theta = 4\pi - 2 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| d\theta. \end{aligned}$$

Lo cual implica que, para obtener (2.14), es suficiente probar

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| d\theta \geq 1. \quad (2.15)$$

Sea  $f$  una función no negativa,  $2\pi$ -periódica y continua, y sea  $m$  un entero no negativo. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} (f(\theta)\rho'_n(\theta))^{\frac{1}{4}} d\theta &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\varphi_{n,n+k+m}(z)}{W_n(z)} \right|^{\frac{1}{2}} \rho'_n(\theta)^{\frac{1}{4}} \\
 &\times \left| \frac{W_n(z)}{\varphi_{n,n+k}(z)} \right|^{\frac{1}{2}} f(\theta)^{\frac{1}{4}} d\theta \leq \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k+m}(z)}{W_n(z)} \right|^2 \rho'_n(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{W_n(z)}{\varphi_{n,n+k}(z)} \right|^2 f(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{4}} \\
 &\leq (2\pi)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{W_n(z)}{\varphi_{n,n+k}(z)} \right|^2 f(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{4}}.
 \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\theta)\rho'_n(\theta))^{\frac{1}{4}} d\theta \right)^4 &\leq \\
 \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| d\theta \right)^2 &\left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{W_n(z)}{\varphi_{n,n+k}(z)} \right|^2 f(\theta) d\theta \right). \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| (f\rho'_n)^{\frac{1}{4}} - (f\rho')^{\frac{1}{4}} \right| d\theta \right)^4 &\leq \\
 \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f\rho'_n - f\rho'|^{\frac{1}{4}} d\theta \right)^4 &\leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f\rho'_n - f\rho'| d\theta \right).
 \end{aligned}$$

Esta desigualdad y el apartado (i) de la condición de admisibilidad fuerte implican

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\theta)\rho'_n(\theta))^{\frac{1}{4}} d\theta \right)^4 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\theta)\rho'(\theta))^{\frac{1}{4}} d\theta \right)^4. \tag{2.17}$$

Si se toman límites en (2.16), gracias a (2.5) y (2.17) se obtiene que

$$\left( \int_0^{2\pi} (f(\theta)\rho'(\theta))^{\frac{1}{4}} d\theta \right)^4 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| d\theta \right)^2 2\pi \int_0^{2\pi} f(\theta) d\rho(\theta).$$



Debido al corolario 3.3 en [71], de esta última desigualdad se obtiene (2.15) y, por tanto, (2.14). Obsérvese que el límite es uniforme en  $m \geq 0$ , la razón es que  $m$  sólo aparece en la primera integral del segundo miembro de (2.16).

Finalmente, se tiene que

$$\left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right|^2 - 1 \, d\theta \right)^2 \leq \int_0^{2\pi} \left( \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| - 1 \right)^2 d\theta \int_0^{2\pi} \left( \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{\varphi_{n,n+k+m}(z)} \right| + 1 \right)^2 d\theta.$$

La primera integral del segundo miembro tiende a cero debido a (2.14) y la segunda permanece acotada, lo cual completa la demostración.  $\square$

Combinando (2.1)-(2.4) y usando el teorema 2.2, obtenemos

**Teorema 2.3** Si  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n,n+k+1}(0) = 0, \quad (2.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n,n+k+1}}{\alpha_{n,n+k}} = 1, \quad (2.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n,n+k+1}(w)}{\Phi_{n,n+k}(w)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k+1}(w)}{\varphi_{n,n+k}(w)} = w, \quad |w| \geq 1, \quad (2.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n,n+k+1}^*(w)}{\Phi_{n,n+k}^*(w)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k+1}^*(w)}{\varphi_{n,n+k}^*(w)} = 1, \quad |w| \leq 1. \quad (2.21)$$

En (2.20)-(2.21) la convergencia es uniforme en los subconjuntos compactos de las regiones indicadas.

Siguiendo el esquema del lema 5 en [60] podemos probar

**Teorema 2.4** Si la terna  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, j)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n,n+k}^*(w)}{\Phi_{n,n+k}(w)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k}^*(w)}{\varphi_{n,n+k}(w)} = 0, \quad |w| > 1, \quad (2.22)$$

para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , uniformemente en compactos de  $\{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $k \in \mathbb{Z}$  arbitrario. Consideramos la sucesión de funciones

$$F_{n,n+k}(w) = \frac{\Phi_{n,n+k}(w)}{\Phi_{n,n+k}^*(w)}, \quad |w| < 1,$$

que son analíticas en el disco unidad. Probaremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,n+k}(w) = 0,$$

uniformemente en  $U$ , lo cual es equivalente a demostrar el enunciado del teorema debido a la identidad

$$\frac{\Phi_{n,n+k}^*(w)}{\Phi_{n,n+k}(w)} = \overline{\left( \frac{\Phi_{n,n+k}(1/\bar{w})}{\Phi_{n,n+k}^*(1/\bar{w})} \right)}, \quad |w| > 1.$$

Como  $|F_{n,n+k}(w)| \leq 1$ ,  $w \in U$ , dicha familia de funciones es normal y es suficiente probar la convergencia para  $|w| \leq 1/4$ .

Para  $|w| \leq 1/4$ , se deduce de (2.1) y de (2.2) que

$$|F_{n,m}(w)| = \left| \frac{w F_{n,m-1}(w) + \Phi_{n,m}(0)}{1 + w \overline{\Phi_{n,m}(0)} F_{n,m-1}(w)} \right| \leq \frac{1}{2} |F_{n,m-1}(w)| + |\Phi_{n,m}(0)|. \quad (2.23)$$

Fijemos  $\epsilon > 0$  y un número natural  $m$  tal que  $1/2^m \leq \epsilon/2$ . Entonces, existe  $N = N(\epsilon)$  tal que para todo  $n \geq N$  y para  $i = 0, 1, \dots, m$  se tiene que  $|\Phi_{n,n+k-i}(0)| \leq \epsilon/4$ , de acuerdo con (2.18). Por tanto, utilizando la acotación (2.23) obtenemos

$$|F_{n,n+k-i}(w)| \leq \frac{1}{2} |F_{n,n+k-i-1}(w)| + \frac{\epsilon}{4}.$$

Aplicando esta desigualdad repetidamente para  $i = 0, 1, \dots, m$  llegamos a que

$$|F_{n,n+k}(w)| \leq \frac{1}{2^{m+1}} |F_{n,n+k-m-1}(w)| + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{8} + \dots + \frac{\epsilon}{2^{m+2}} < \frac{\epsilon}{2^{m+1}} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon,$$

donde  $|w| \leq 1/4$  y  $n \geq N$ , lo cual completa la demostración. □

**Teorema 2.5** Si  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{W_n(z)} \right|^2 \rho'_n(\theta) - 1 \, d\theta. \quad (2.24)$$

Más aún, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z) \overline{\varphi_{n,n+k+m}(z)} z^m}{|W_n(z)|^2} \rho'_n(\theta) - 1 \right| d\theta = 0. \quad (2.25)$$

DEMOSTRACIÓN. El esquema de la prueba es el mismo que en el teorema 2.2. En este caso el paso principal es probar que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{W_n(z)} \right| \sqrt{\rho'_n(\theta)} \, d\theta \geq 1,$$

lo cual se hace de manera parecida a como se demuestra (2.15). La fórmula (2.25) se deduce de (2.24) y (2.20). Para más detalles, véase el teorema 4 en [63].

□

Del teorema 2.5 se deduce

**Teorema 2.6** Si  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$ , entonces para toda función  $f$  medible Borel y acotada en  $[0, 2\pi]$  y para cada número natural  $m \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{\varphi_{n,n+k}(z) \overline{\varphi_{n,n+k+m}(z)} z^m}{|W_n(z)|^2} \rho'_n(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta \quad (2.26)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{\varphi_{n,n+k}(z) \overline{\varphi_{n,n+k+m}(z)} z^m}{|W_n(z)|^2} d\rho_n(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta. \quad (2.27)$$

DEMOSTRACIÓN. La ecuación (2.26) se deduce de (2.25) de manera inmediata. Para probar (2.27) obsérvese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi_{n,n+k}(z) \overline{\varphi_{n,n+k+m}(z)} z^m|}{|W_n(z)|^2} (d\rho_n)_s(\theta) = 0, \quad (2.28)$$

donde  $(d\rho_n)_s$  denota la parte singular de  $d\rho_n$  con respecto a la medida de Lebesgue; es decir,  $(d\rho_n)_s = d\rho_n - \rho'_n d\theta/(2\pi)$ . Para ello, tómese  $f \equiv 1$  en (2.26) con  $m = 0$  y úsese que

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{W_n(z)} \right|^2 \rho'_n(\theta) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{W_n(z)} \right|^2 d\rho_n(\theta) = 2\pi.$$

Por lo que se llega a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{W_n(z)} \right|^2 (d\rho_n)_s(\theta) = 0.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{|\varphi_{n,n+k}(z) \overline{\varphi_{n,n+k+m}(z)} z^m|}{|W_n(z)|^2} (d\rho_n)_s(\theta) \\ & \leq \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{W_n(z)} \right|^2 (d\rho_n)_s(\theta) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_{n,n+k+m}(z)}{W_n(z)} z^m \right|^2 (d\rho_n)_s(\theta) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y ambas integrales del segundo miembro tienden a cero, por lo que se cumple (2.28).

De las ecuaciones (2.28) y (2.26) se deduce (2.27).

□

## § II.5 Convergencia débil y del cociente en la recta real

En esta sección se probarán resultados similares a los de la sección § II.4 para sucesiones  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de medidas de Borel finitas y positivas en  $[-1, 1]$  cuyos soportes contienen infinitos puntos.

Sea  $\{w_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de polinomios con coeficientes reales tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :  $\text{gr } w_{2n} = i_n$ ,  $0 \leq i_n \leq 2n$ ; y  $w_{2n} \geq 0$  en  $[-1, 1]$ . Si  $i_n < 2n$ , consideramos que  $x_{2n,i} = \infty$  para  $1 \leq i \leq 2n - i_n$ ; si además,  $i_n > 0$ , entonces  $\{x_{2n,i}\}_{2n-i_n+1 \leq i \leq 2n}$ , denota el conjunto de ceros de  $w_{2n}$ . Cuando  $i_n = 2n$ ,  $\{x_{2n,i}\}_{1 \leq i \leq 2n}$  es el conjunto de ceros de  $w_{2n}$ .

Consideremos  $d\tau_n = \frac{d\mu_n}{w_{2n}}$ . Si, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{-1}^1 \frac{d\mu_n(x)}{w_{2n}(x)} < +\infty ,$$

puede construirse una tabla de polinomios  $\{l_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ , tal que  $l_{n,m} = \beta_{n,m}x^m + \dots$ ,  $\beta_{n,m} > 0$ , es el  $m$ -ésimo POLINOMIO ORTONORMAL con respecto a  $\tau_n$ ; es decir, estos polinomios están unívocamente determinados por el hecho de tener coeficiente conductor positivo y verificar las siguientes relaciones:

$$\int_{-1}^1 l_{n,k} l_{n,m} d\tau_n(x) = \delta_{k,m} .$$

De acuerdo con las condiciones anteriores,  $w_{2n}(\cos \theta)$  es no negativo para  $\theta \in \mathbb{R}$  y, de este modo, (véase p. 3 de [113]) existe un polinomio algebraico  $W'_{2n}(w)$ , de grado  $i_n$ , cuyos ceros están en  $\bar{U}$  tal que

$$w_{2n}(\cos \theta) = |W'_{2n}(e^{i\theta})|^2 , \quad \theta \in [0, 2\pi] .$$

Es fácil ver que los ceros de  $W'_{2n}$  son los puntos

$$\left\{ \frac{1}{\Psi(x_{2n,i})} \right\}_{2n-i_n+1 \leq i \leq 2n} ,$$

donde  $\Psi$  denota la aplicación conforme de  $\bar{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$  en  $\{|w| > 1\}$ , tal que  $\Psi(\infty) = \infty$  y  $\Psi'(\infty) > 0$  (en  $[-1, 1]$   $\Psi$  se extiende de manera que su función inversa sea continua en  $\{|w| = 1\}$ ). Tómese  $W_{2n} = w^{2n-i_n} W'_{2n}$ ; entonces, el grado de  $W_{2n}$  es igual a  $2n$  y

$$w_{2n}(\cos \theta) = |W_{2n}(e^{i\theta})|^2 , \quad \theta \in [0, 2\pi] .$$

Los polinomios  $l_{n,m}$  están estrechamente relacionados con los polinomios  $\varphi_{2n,2m}$ , polinomios ortonormales con respecto a la medida  $\sigma_{2n}$  definida por

$$d\sigma_{2n}(\theta) = d\tau_n(\cos \theta) = \frac{d\mu_n(\cos \theta)}{|W_{2n}(z)|^2} , \quad z = e^{i\theta} .$$

Esto es,  $\sigma_{2n}(E) = \tau_n(\{\cos \theta; \theta \in E\})$  siempre que  $E \subset [0, \pi]$  ó  $E \subset [\pi, 2\pi]$ . De modo que escribiendo  $\sigma_{2n}(\theta) = \sigma_{2n}(t : \{0 \leq t \leq \theta\})$ , tenemos

$$\sigma_{2n}(\theta) = \begin{cases} G_n(1) - G_n(\cos \theta) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi \\ G_n(1) + G_n(\cos \theta) & \text{si } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} ,$$



donde  $G_n(x) = \int_{-1}^x d\tau_n(t)$ ,  $x \in [-1, 1]$ , en todo punto  $\theta$  donde  $\sigma_{2n}$  sea continua o equivalentemente, en casi todo punto de  $[0, 2\pi]$ . Luego

$$\sigma'_{2n}(\theta) = |\sin \theta| G'_n(\cos \theta) = |\sin \theta| \frac{\mu'_n(\cos \theta)}{|W_{2n}(e^{i\theta})|^2} = |\sin \theta| \tau'_n(\cos \theta),$$

en casi todo punto de  $[0, 2\pi]$ . Obsérvese que se cumple que  $\sigma' > 0$  en casi todo punto si  $\tau' > 0$  en casi todo punto, donde

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \tau(1) - \tau(\cos \theta) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi \\ \tau(1) + \tau(\cos \theta) & \text{si } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

y  $\tau$  es cualquier medida del mismo tipo que  $\tau_n$ . Para cada  $n$  fijo, usaremos la conocida fórmula (véase el teorema V.1.4 de [36])

$$l_{n,m}(x) = \frac{\varphi_{2n,2m}(w) + \varphi_{2n,2m}^*(w)}{w^m \sqrt{2\pi(1 + \Phi_{2n,2m}(0))}}, \quad (2.29)$$

donde  $\Phi_{2n,2m} = \frac{\varphi_{2n,2m}}{\alpha_{2n,2m}}$  y  $x = \frac{1}{2}(w + 1/w)$ . Si  $L_{n,m} = \frac{l_{n,m}}{\beta_{n,m}}$ , la relación anterior se escribe

$$L_{n,m}(x) = \frac{\Phi_{2n,2m}(w) + \Phi_{2n,2m}^*(w)}{(2w)^m(1 + \Phi_{2n,2m}(0))}. \quad (2.30)$$

De este modo, usando (2.29) y (2.30), para cada  $k \in \mathbb{Z}$  fijo y  $n + k \geq 0$ , tenemos

$$\frac{l_{n,n+k+1}(x)}{l_{n,n+k}(x)} = \frac{1}{w} \frac{\sqrt{1 + \Phi_{2n,2n+2k}(0)}}{\sqrt{1 + \Phi_{2n,2n+2k+2}(0)}} \frac{\varphi_{2n,2n+2k+2}(w)}{\varphi_{2n,2n+2k}(w)} \frac{1 + \frac{\varphi_{2n,2n+2k+2}^*(w)}{\varphi_{2n,2n+2k+2}(w)}}{1 + \frac{\varphi_{2n,2n+2k}^*(w)}{\varphi_{2n,2n+2k}(w)}}, \quad (2.31)$$

$$\frac{L_{n,n+k+1}(x)}{L_{n,n+k}(x)} = \frac{1}{2w} \frac{1 + \Phi_{2n,2n+2k}(0)}{1 + \Phi_{2n,2n+2k+2}(0)} \frac{\Phi_{2n,2n+2k+2}(w)}{\Phi_{2n,2n+2k}(w)} \frac{1 + \frac{\Phi_{2n,2n+2k+2}^*(w)}{\Phi_{2n,2n+2k+2}(w)}}{1 + \frac{\Phi_{2n,2n+2k}^*(w)}{\Phi_{2n,2n+2k}(w)}}. \quad (2.32)$$

Denotaremos  $d\rho_n(\theta) = d\mu_n(\cos \theta)$  como en la sección § II.4. Establecemos ahora una condición de admisibilidad en la recta real.

**Definición 2.3** Sea  $k \in \mathbb{Z}$  fijo, se dice que  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[-1, 1]$  si  $(\{\rho_n\}, \{W_{2n}\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$ .

No es difícil comprobar, debido a la relación existente entre las medidas en la circunferencia y en la recta real, que la definición anterior equivale a que la terna  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, k)$  satisfaga las siguientes condiciones:

(I) Existe una medida de Borel finita y positiva  $\mu$  en el intervalo  $[-1, 1]$  tal que  $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ ,  $n \rightarrow \infty$ , y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |\mu'_n - \mu'| dx = 0.$$

(II)  $\mu' > 0$  en casi todo punto de  $[-1, 1]$ .

(III)  $\|d\tau_n\| = \int_{-1}^1 d\tau_n(x) < +\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(IV)  $\int_{-1}^1 \prod_{i=1}^{-k} |1 - \frac{x}{x_{2n,i}}|^{-1} d\mu_n(x) \leq M < +\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\frac{x}{x_{2n,i}} \equiv 0$  si  $x_{2n,i} = \infty$  (esta condición sólo se aplica en el caso en que  $k$  sea un número entero negativo).

(V)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \left(1 - \frac{1}{|\Psi(x_{2n,i})|}\right) = +\infty$ .

Imponiendo estas condiciones se prueba el siguiente teorema.

**Teorema 2.7** Si  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k)$  es fuertemente admisible en el intervalo  $[-1, 1]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n,n+k+1}(x)}{L_{n,n+k}(x)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n,n+k+1}(x)}{l_{n,n+k}(x)} = \frac{1}{2} \Psi(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad (2.33)$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_{n,n+k+1}}{\beta_{n,n+k}} = 2. \quad (2.34)$$

**Demostración.** La prueba de (2.33) es inmediata a partir de (2.31), (2.32), (2.18), (2.20) y (2.22), mientras que (2.34) es consecuencia directa de (2.33).

□

Dado  $k \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n + k - 1 \geq 0$ , del mismo modo que en la teoría general de polinomios ortogonales, se prueba que el polinomio  $l_{n,n+k}$  satisface la relación de recurrencia a tres términos

$$x l_{n,n+k}(x) = a_{n,k,1} l_{n,n+k+1}(x) + a_{n,k,0} l_{n,n+k}(x) + a_{n,k,-1} l_{n,n+k-1}(x). \quad (2.35)$$

Para seguir adelante necesitamos primero el siguiente

**Lema 2.1** Sea  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k - 1)$  fuertemente admisible en  $[-1, 1]$ . Entonces

$$l_{n,n+k}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi_{2n,2n+2k}(z)}{z^{n+k}} \right] + o(|\varphi_{2n,2n+2k}(z)|), \quad (2.36)$$

donde  $o(\cdot)$  es uniforme en  $\theta$ , ( $z = e^{i\theta}$ ) cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k - 1)$  es fuertemente admisible en el intervalo  $[-1, 1]$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{2n,2n+2k}(0) = 0$ . Por otro lado la fórmula (2.29) se puede reescribir

$$l_{n,m}(x) = \left[ \frac{\pi}{2} (1 + \Phi_{2n,2m}(0)) \right]^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi_{2n,2m}(z)}{z^m} \right], \quad z = x + iy. \quad (2.37)$$

Por tanto, se tiene

$$[1 + o(1)] l_{n,n+k}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi_{2n,2n+2k}(z)}{z^{n+k}} \right]$$

y

$$l_{n,n+k}(x) = \mathcal{O}(|\varphi_{2n,2n+2k}(z)|),$$

donde  $\mathcal{O}(\cdot)$  es uniforme en  $\theta$  cuando  $n$  tiende a infinito. Estas dos últimas relaciones juntas dan (2.36).

□

Podemos ahora probar



**Teorema 2.8** Si  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k-3)$  es fuertemente admisible en el intervalo  $[-1, 1]$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k,-1} = \frac{1}{2} \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k,0} = 0. \quad (2.38)$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k-3)$  es fuertemente admisible en el intervalo  $[-1, 1]$  también lo es  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k+2)$ ; luego, usando (2.36), obtenemos

$$\begin{aligned} l_{n,n+k+1}(x) l_{n,n+k-1}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi_{2n,2n+2k+2}(z)}{z^{n+k+1}} + \frac{\varphi_{2n,2n+2k-2}(z)}{z^{n+k-1}} \right] \\ &+ o(|\varphi_{2n,2n+2k+2}(z)|) + o(|\varphi_{2n,2n+2k-2}(z)|). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Además,  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k)$  es también fuertemente admisible por lo que, usando (2.20) para  $k$  y  $k-1$ , se tiene

$$\varphi_{2n,2n+2k \pm 2}(z) = z^{\pm 2} \varphi_{2n,2n+2k}(z) + o(|\varphi_{2n,2n+2k}(z)|). \quad (2.40)$$

Sustituyendo (2.40) en (2.39) y utilizando (2.36) se obtiene

$$\begin{aligned} l_{n,n+k+1}(x) l_{n,n+k-1}(x) &= 2x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi_{2n,2n+2k}(z)}{z^{n+k}} \right] \\ &+ o(|\varphi_{2n,2n+2k}(z)|) = 2x l_{n,n+k}(x) + o(|\varphi_{2n,2n+2k}(z)|). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para llegar a probar (2.38) multiplicamos ambos lados de (2.41) por

$$l_{n,m}(x) d\mu_n(x) = l_{n,m}(\cos \theta) d\sigma_{2n}(\theta)$$

e integramos en  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Observando que

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^{2\pi} |l_{n,m}(\cos \theta) \varphi_{2n,2n+2k}(z)| d\sigma_{2n}(\theta) \right)^2 \\ &\leq 2 \int_{-1}^1 |l_{n,m}(x)|^2 d\mu_n(x) \int_0^{2\pi} |\varphi_{2n,2n+2k}(z)|^2 d\sigma_{2n}(\theta) \leq 4\pi \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 2x l_{n,n+k}(x) l_{n,m}(x) d\mu_n(x) = \\ \int_{-1}^1 (l_{n,n+k+1}(x) + l_{n,n+k-1}(x)) l_{n,m}(x) d\mu_n(x) + o(1). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Como se ve fácilmente, gracias a (2.35), para  $m = n + k + i$  la integral del primer miembro de (2.42) es igual a  $2a_{n,k,i}$ . Por tanto, los límites (2.38) se deducen de (2.42) tomando valores adecuados de  $m$ , con lo cual se completa la prueba.  $\square$

**Teorema 2.9** Si  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k)$  es fuertemente admisible en el intervalo  $[-1, 1]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  y  $T_n$  denota el  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev, i.e.,  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ . Entonces, para todo  $m \in \mathbb{N}$  y toda función  $f$  medible Borel y acotada en  $[-1, 1]$ , se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \frac{l_{n,n+k}(x) l_{n,n+k+m}(x)}{w_{2n}(x)} \mu'_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.43)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \frac{l_{n,n+k}(x) l_{n,n+k+m}(x)}{w_{2n}(x)} d\mu_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2.44)$$

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que las fórmulas (2.43) y (2.44) son equivalentes. Para ello, obsérvese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \frac{l_{n,n+k}^2(x)}{w_{2n}(x)} (d\mu_n)_s(x) = 0, \quad (2.45)$$

donde  $(d\mu_n)_s(x) = d\mu_n - \mu'_n dx$  es la parte singular de  $d\mu$ . De hecho, de (2.37) se deduce que

$$|l_{n,n+k}(x)| < C |\varphi_{2n,2n+2k}(z)| \quad (2.46)$$

para todo  $n$  suficientemente grande, donde  $C$  es una constante independiente de  $\theta$  y  $n$ . De este modo, teniendo en cuenta que  $(d\mu)_s(x) = (d\sigma)_s(\theta)$ , la relación (2.45) se deduce de (2.26) y de (2.27) tomando  $f \equiv 1$  y  $m = 0$ . Por la desigualdad de Schwarz, el límite (2.45) implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \frac{l_{n,n+k}(x) l_{n,n+k+m}(x)}{w_{2n}(x)} (d\mu_n)_s(x) = 0.$$

De donde se tiene la equivalencia de (2.43) y de (2.44).

Para demostrar (2.44) observemos que se cumple cuando  $f$  es un polinomio. En efecto, para cada  $j \in \mathbb{N}$  fijo, llegamos, usando (2.35)  $j$  veces, a que

$$x^j l_{n,n+k}(x) = \sum_{-1 \leq k_i \leq 1, i=1, \dots, j} a_{n,k,k_1} \cdot a_{n,k+k_1,k_2} \cdot \dots \cdot a_{n,k+k_1+\dots+k_{j-1},k_j} \cdot l_{n,n+k+k_1+\dots+k_j}. \quad (2.47)$$

Por tanto, para  $f(x) = x^j$ , la integral del primer miembro de (2.44), en virtud de las relaciones de ortogonalidad, tiene como límite un número que sólo depende de los límites de los coeficientes que aparecen en el segundo miembro de (2.47). Pero, debido a (2.38), estos límites no dependen de la elección de  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\})$  siempre que  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k - 2j)$  sea fuertemente admisible. De modo que, para calcular el límite, podemos elegir  $d\mu_n = (1 - x^2)^{-1/2} dx$  y  $w_{2n}(x) \equiv 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 x^j l_{n,n+k}(x) l_{n,n+k+m}(x) \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^j \theta [\cos m\theta + \cos(2n + 2k + m)\theta] d\theta, \end{aligned}$$

lo cual es igual a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x^j T_m(x) \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}}$$

si  $2n + 2k + m > j$ .

De modo que (2.44) se cumple cuando  $f$  es un polinomio. Para demostrar que también es cierto cuando  $f$  es una función acotada medible Borel arbitraria, supongamos que  $|f| < M/3$  para algún  $M$ ; sea  $\epsilon > 0$  y escribamos  $f$  como  $P + g$ , donde

$P$  es un polinomio y  $g$  es una función con  $|g| < M$  y verificando

$$\int_{-1}^1 |g| (1-x^2)^{-1/2} dx < \epsilon. \quad (2.48)$$

Así

$$\left| \int_{-1}^1 g(x) T_m(x) (1-x^2)^{-1/2} dx \right| \leq \epsilon \pi \max\{|T_m(x)| : -1 \leq x \leq 1\} = \epsilon \pi. \quad (2.49)$$

Por otra parte, utilizando la desigualdad de Schwarz y (2.46), tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 g(x) l_{n,n+k}(x) l_{n,n+k+m}(x) d\mu_n(x) \right|^2 &\leq \int_{-1}^1 g^2(x) l_{n,n+k}^2(x) d\mu_n(x) \\ &< C^2 \int_0^{2\pi} g^2(\cos \theta) |\varphi_{2n,2n+2k}(z)|^2 d\sigma_{2n}(\theta) \end{aligned}$$

para todo  $n$  suficientemente grande. El límite de la derecha, cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , es igual a

$$C^2 \int_0^{2\pi} g^2(\cos \theta) d\theta = C^2 \int_{-1}^1 g^2(x) (1-x^2)^{-1/2} dx,$$

según (2.27). Esta cantidad es menor que  $C^2 M$ , debido a (2.48), ya que  $|g^2| < M |g|$ . Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-1}^1 g(x) l_{n,n+k}(x) l_{n,n+k+m}(x) d\mu_n(x) \right|^2 \leq C^2 M \epsilon.$$

Como  $\epsilon > 0$  es arbitrario, esta última desigualdad y (2.49), junto con el hecho que (2.44) se cumple para el polinomio  $P = f - g$ , implican que (2.44) es cierto para cualquier función  $f$  acotada medible Borel, lo que completa la demostración. □

Señalemos, por último, que la única condición de admisibilidad fuerte en la cual aparece  $k$  es en el apartado (IV) y esta condición se cumple para todo  $2k$  si los ceros de  $w_{2n}$  se mantienen alejados de  $[-1, 1]$ .

## § II.6 Convergencia fuerte o de Szegő

El contexto natural para el estudio de la convergencia fuerte de polinomios ortogonales lo constituye los espacios de Hardy. Nosotros nos limitaremos a definir los espacios  $\mathbb{H}_p$ , comentar cuál es su relación con la función de Szegő y enunciar algún resultado que será utilizado en las demostraciones. Para una consulta más detallada véase [97], donde aparecen estos temas de modo suficiente. Para más información pueden consultarse las monografías [27] y [57].

Sea  $f$  una función analítica en el disco unidad abierto. Sea  $p$  un número real positivo. Llamamos

$$M_p(f; r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad r < 1.$$

Se dice que la función  $f$ , analítica en el disco unidad abierto, pertenece al ESPACIO DE HARDY  $\mathbb{H}_p$  si verifica

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} M_p(f; r) < \infty.$$

Si  $p \geq 1$ , el espacio  $\mathbb{H}_p$  tiene estructura de espacio normado definiendo la norma de  $f$  como  $\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1^-} M_p(f; r)$ . Claramente,  $\mathbb{H}_s \subset \mathbb{H}_r$  si  $r < s$ .

El resultado que utilizaremos más adelante es el siguiente:

**Teorema** *Toda función que pertenezca al espacio  $\mathbb{H}_1$  admite límites radiales finitos en casi todo punto. Es decir, si  $f \in \mathbb{H}_1$ , entonces, para casi todo punto  $\theta \in [0, 2\pi]$ , existe*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}).$$

Este límite define una función  $f^*(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$  que pertenece al espacio  $L^1[0, 2\pi]$ . Más aún,  $f$  es la INTEGRAL DE POISSON de  $f^*$ , esto es

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) P(z, e^{it}) dt, \quad |z| < 1, \quad (2.50)$$

donde  $P(z, w) = \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}$  es el NÚCLEO DE POISSON.

Si la medida  $\rho$  cumple  $\log \rho' \in L^1[0, 2\pi]$  se dice que  $\rho$  pertenece a la CLASE DE SZEGŐ y se define la FUNCIÓN DE SZEGŐ asociada a  $\rho$ ,  $S(\rho'; \cdot)$ , mediante la expresión

$$S(\rho'; z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{w+z}{w-z} \log \rho'(\theta) d\theta \right\}, \quad w = e^{i\theta}, \quad |z| \neq 1.$$

La clase de Szegő aparece en la resolución del así llamado problema extremal de Szegő, tema que queda fuera de los márgenes de este trabajo (para información sobre el mismo pueden consultarse, por ejemplo, [36], [81] y [113]). Si  $\varphi_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio ortonormal respecto a la medida  $\rho$  se cumple el conocido teorema de Szegő (véase [36], capítulo V)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} = S(\rho'; z), \quad (2.51)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\{z : |z| > 1\}$ .

La función  $S(\rho'; \cdot)$  pertenece a  $\mathbb{H}_2$ . Es más, en cierto sentido, las funciones de Szegő determinan todas las funciones de  $\mathbb{H}_2$ , ya que se cumple el siguiente teorema de factorización: si la función  $f$  pertenece a  $\mathbb{H}_2$  entonces  $f$  se puede escribir de la forma  $f = M_f Q_f$ , donde  $M_f$  es una función analítica acotada y

$$Q_f(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{w+z}{w-z} \log |f^*(w)| d\theta \right\}, \quad w = e^{i\theta}, \quad |z| < 1.$$

A las funciones  $M_f$  y  $Q_f$  se les llama factores interior y exterior de  $f$ , respectivamente.

Estamos ahora en condiciones de usar la hipótesis de admisibilidad para probar un teorema de convergencia fuerte tipo Szegő, en la misma dirección que el teorema 2 de [61].

**Teorema 2.10** *Sea la terna  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  admisible en  $[0, 2\pi]$ . Supongamos que se cumple que  $\log \rho' \in L^1[0, 2\pi]$  y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \log \rho'_n(\theta) d\theta \geq \int_0^{2\pi} \log \rho'(\theta) d\theta$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{z^k W_n(z)} = S(\rho'; z), \quad (2.52)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\{z : |z| > 1\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que si se multiplica  $W_n$  por una constante los correspondientes polinomios ortonormales quedan multiplicados por la misma constante y el cociente que aparece en el primer miembro de (2.52) permanece sin cambios. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer en todo lo que sigue que  $W_n$  es un polinomio mónico. Si  $P_n$  es un polinomio de grado exactamente  $n$ , denotamos  $P_n^*(z) = z^n \overline{P_n(\frac{1}{z})}$ , como es habitual. Será más cómodo probar el límite equivalente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n^*(z)}{\varphi_{n,n+k}^*(z)} = S(\rho'; z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $U$ .

En primer lugar, demostremos que

$$\left\{ \frac{W_n^*(z)}{\varphi_{n,n+k}^*(z)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

está uniformemente acotada en subconjuntos compactos de  $U$ . De hecho, como  $\varphi_{n,n+k}^*(z)$  no tiene ceros en  $U$ , usando la fórmula de Cauchy y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene, para  $z \in U$

$$\begin{aligned} \left| \frac{W_n^*(z)}{\varphi_{n,n+k}^*(z)} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{w W_n^*(w)}{(w-z)\varphi_{n,n+k}^*(w)} \right| d\theta \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{w}{w-z} \right|^2 d\theta} \\ &\times \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{W_n^*(w)}{\varphi_{n,n+k}^*(w)} \right|^2 d\theta} \leq \frac{1}{\inf_{|w|=1} |z-w|} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{W_n^*(w)}{\varphi_{n,n+k}^*(w)} \right|^2 d\theta}. \end{aligned}$$

Del teorema 2.1 se deduce que la última integral tiende a  $\sqrt{\frac{\rho[0, 2\pi]}{2\pi}}$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , ya que

$$\left| \frac{W_n^*(w)}{\varphi_{n,n+k}^*(w)} \right| = \left| \frac{W_n(w)}{\varphi_{n,n+k}(w)} \right|, \quad |w| = 1.$$

De modo que si  $K$  es un subconjunto compacto de  $U$ , para todo  $\epsilon > 0$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande se tiene

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{W_n^*(z)}{\varphi_{n,n+k}^*(z)} \right| \leq \frac{1}{\inf_{|w|=1, z \in K} |z-w|} \sqrt{\frac{\rho[0, 2\pi]}{2\pi}} + \epsilon,$$

que era lo que necesitábamos probar.

Escojamos  $\{W_n^*/\varphi_{n,n+k}^*\}$ ,  $n \in \Gamma$ ,  $\Gamma \subset \mathbb{N}$ , una subsucesión convergente cualquiera, cuyo límite denotamos por  $S_\Gamma$ . Probaremos que  $S_\Gamma \in \mathbb{H}_2$ ,  $S_\Gamma \neq 0$  y

$$S_\Gamma(0) \geq \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho'(\theta) d\theta \right\}. \quad (2.53)$$

Por un lado,

$$\lim_{n \in \Gamma} \left| \frac{W_n^*(z)}{\varphi_{n,n+k}^*(z)} \right|^2 = |S_\Gamma(z)|^2,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $U$ . Por otra parte, para cada  $\epsilon > 0$  y número natural  $n$  suficientemente grande, si  $0 < r < 1$ ,

$$\int_{|w|=r} \left| \frac{W_n^*(w)}{\varphi_{n,n+k}^*(w)} \right|^2 d\theta \leq \int_{|w|=1} \left| \frac{W_n^*(w)}{\varphi_{n,n+k}^*(w)} \right|^2 d\theta \leq \rho[0, 2\pi] + \epsilon,$$

utilizando el teorema 2.1. Por lo que tomando límites se concluye

$$\int_{|w|=r} |S_\Gamma(w)|^2 d\theta \leq \rho[0, 2\pi] + \epsilon.$$

Como esta desigualdad es válida para cualquier  $r$  entre 0 y 1 deducimos que  $S_\Gamma \in \mathbb{H}_2$ .

Es obvio que  $W_n^* \neq 0$  en  $U$ . De aquí, o bien  $S_\Gamma \equiv 0$ , o bien  $S_\Gamma(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ . Pero, denotando  $\Phi_{n,n+k} = \alpha_{n,n+k}^{-1} \varphi_{n,n+k}$  y usando la desigualdad de Jensen, obtenemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{W_n^*(0)}{\varphi_{n,n+k}^*(0)} \right)^2 &= \frac{1}{\alpha_{n,n+k}^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Phi_{n,n+k}(w)}{W_n^*(w)} \right|^2 d\rho_n(\theta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Phi_{n,n+k}^*(w)}{W_n^*(w)} \right|^2 \rho'_n(\theta) d\theta \\ &\geq \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{\Phi_{n,n+k}^*(w)}{W_n^*(w)} \right|^2 d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho'_n(\theta) d\theta \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho'_n(\theta) d\theta \right\}. \end{aligned}$$



Por tanto

$$\begin{aligned} S_{\Gamma}(0) &= \liminf_{n \in \Gamma} \frac{W_n^*(0)}{\varphi_{n,n+k}^*(0)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} S(\rho'_n; 0) \\ &\geq S(\rho'; 0) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho'(\theta) d\theta \right\} > 0, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se cumple por hipótesis.

Ya que la familia de funciones está uniformemente acotada en subconjuntos compactos es suficiente demostrar que cualquier subsucesión convergente tiende a  $S(\rho, z)$ . Para ello, basta probar que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\log S_{\Gamma}(z)) &= \log |S_{\Gamma}(z)| = \operatorname{Re}(\log S(\rho'; z)) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(z, w) \log \rho'(\theta) d\theta = \operatorname{Re}(\log S(\rho'; z)). \end{aligned}$$

En efecto, usando una vez más la desigualdad de Jensen y el teorema 2.1 se deduce

$$\begin{aligned} |S_{\Gamma}(z)|^2 &= \lim_{n \in \Gamma} \left| \frac{W_n^*(z)}{\varphi_{n,n+k}^*(z)} \right|^2 = \lim_{n \in \Gamma} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, w) \log \left| \frac{W_n^*(w)}{\Phi_{n,n+k}^*(w)} \right|^2 d\theta \right\} \\ &\leq \lim_{n \in \Gamma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, w) \left| \frac{W_n^*(w)}{\Phi_{n,n+k}^*(w)} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, w) d\rho(\theta). \end{aligned}$$

Si ahora tomamos límites en la anterior desigualdad cuando  $r$  tiende a 1,  $r < 1$ ,  $z = re^{i\theta'}$ , usando el teorema de Fatou (véanse los capítulos 11 y 17 en [97]) y el hecho de que  $S_{\Gamma} \in \mathbb{H}_2$  deducimos

$$|S_{\Gamma}(e^{i\theta'})|^2 \leq \rho'(\theta'),$$

en casi todo punto (con respecto a la medida de Lebesgue) de  $[0, 2\pi]$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\log S_{\Gamma}(z)) &= \log |S_{\Gamma}(z)| = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(z, w) \log |S_{\Gamma}(w)|^2 d\theta \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(z, w) \log \rho'(\theta) d\theta = \operatorname{Re}(\log S(\rho'; z)). \end{aligned}$$

Pero, según (2.53), tenemos que

$$\operatorname{Re}(\log S_{\Gamma}(0)) = \log |S_{\Gamma}(0)| \geq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \rho'(\theta) d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(0, w) \log \rho'(\theta) d\theta.$$

Por tanto, usando el principio del máximo de las funciones armónicas, se cumple que

$$\operatorname{Re}(\log S_{\Gamma}(z)) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(z, w) \log \rho'(\theta) d\theta.$$

como queríamos probar. De aquí se deduce que  $\operatorname{Im}(\log S_{\Gamma}(z))$  y  $\operatorname{Im}(\log S(\rho'; z))$  se diferencian en una constante. Como  $\operatorname{Im}(\log S_{\Gamma}(0)) = 0 = \operatorname{Im}(\log S(\rho'; 0))$  esta constante es igual a cero. Con esto concluimos la demostración del teorema 2.10.  $\square$

Podemos ahora deducir un teorema análogo para medidas variantes cuyo soporte es un intervalo real. Denotamos  $d\rho_n(\theta) = d\mu_n(\cos \theta)$  y  $d\rho(\theta) = d\mu(\cos \theta)$  como en la sección § II.5. Obsérvese que, como  $\log |\operatorname{sen} \theta| \in L^1[0, 2\pi]$ ,  $\log(\rho'(\theta))$  pertenece a  $L^1[0, 2\pi]$  siempre que  $\frac{\log \mu'_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$  pertenezca a  $L^1[-1, 1]$ .

**Teorema 2.11** *Sea  $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k-1)$  fuertemente admisible en  $[-1, 1]$ . Supongamos que  $\mu \in \mathbf{S}$  y*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{\log \mu'_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq \int_{-1}^1 \frac{\log \mu'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n,n+k}^2(x)}{[\Psi(x)]^{2k} w_{2n}(x)} B_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi} [S(\mu'(\cos \theta) |\operatorname{sen} \theta|; \Psi(x))]^2, \quad (2.54)$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  y

$$B_{2n}(x) = \prod_{i=1}^{2n} \frac{\Psi(x) - \Psi(x_{2n,i})}{1 - \overline{\Psi(x_{2n,i})} \Psi(x)}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Tenemos la igualdad  $w_{2n}(x) = W_{2n}(z) \overline{W_{2n}(z)}$ , donde  $x = \cos \theta$  and  $z = e^{i\theta}$ . Esto es equivalente a  $w_{2n}(x) = W_{2n}(z) \overline{W_{2n}(\frac{1}{z})}$ . Por tanto,  $z^{2n} w_{2n}(x) =$

$W_{2n}(z) W_{2n}^*(z)$ ,  $|z| = 1$ ,  $x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ . Por continuación analítica, se tiene que

$$z^{2n} w_{2n}(x) = W_{2n}(z) W_{2n}^*(z), \quad x = (z + 1/z)/2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Usando esta relación y (2.29), obtenemos

$$\frac{l_{n,n+k}^2(x)}{w_{2n}(x)} = \frac{\varphi_{2n,2n+2k}^2(z)}{z^{2k} W_{2n}(z) W_{2n}^*(z)} \frac{\left(1 + \frac{\varphi_{2n,2n+2k}^*(z)}{\varphi_{2n,2n+2k}(z)}\right)^2}{2\pi(1 + \Phi_{2n,2n+2k}(0))}, \quad |z| > 1,$$

que, reescrita de modo más conveniente, queda

$$\begin{aligned} \frac{l_{n,n+k}^2(x)}{[\Psi(x)]^{2k} w_{2n}(x)} \frac{W_{2n}^*(\Psi(x))}{W_{2n}(\Psi(x))} &= \\ &= \left( \frac{\varphi_{2n,2n+2k}(z)}{z^{2k} W_{2n}(z)} \right)^2 \frac{\left(1 + \frac{\varphi_{2n,2n+2k}^*(z)}{\varphi_{2n,2n+2k}(z)}\right)^2}{2\pi(1 + \Phi_{2n,2n+2k}(0))}, \quad |z| > 1. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Obsérvese que

$$W_{2n}(\Psi(x)) = \prod_{i=1}^{2n} \left( \Psi(x) - \frac{1}{\Psi(x_{2n,i})} \right).$$

Por tanto,

$$\frac{W_{2n}^*(\Psi(x))}{W_{2n}(\Psi(x))} = B_{2n}(x),$$

donde  $\frac{\Psi(x) - \Psi(x_{2n,i})}{1 - \overline{\Psi(x_{2n,i})}\Psi(x)} \equiv \frac{1}{\Psi(x)}$  si  $x_{2n,i} = \infty$ . Tomando límites en (2.55) cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , usando (2.52), (2.18) y (2.22) llegamos a probar (2.54).  $\square$

## § II.7 Algunos ejemplos

El propósito de esta sección es discutir las condiciones que se exigen en la definición de admisibilidad fuerte. El hecho de que el teorema 2.10 no requiera

la condición de admisibilidad fuerte puede hacernos pensar que el apartado (i) de esta definición impone una condición demasiado restrictiva sobre las medidas  $\{d\rho_n\}$  y que el teorema 2.2 podría demostrarse sin ella o debilitada de algún modo. Veamos, en primer lugar, mediante un ejemplo, que el teorema 2.2 es falso si prescindimos de la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\rho'_n(\theta) - \rho'(\theta)| d\theta = 0.$$

Pongamos

$$d\rho_n(\theta) = (\cos(n\theta) + 2) \frac{d\theta}{4\pi}, \quad n \geq 1.$$

y tomemos  $W_n(z) = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Por el teorema de Riemann-Lebesgue se cumple

$$d\rho_n \xrightarrow{*} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Por tanto, la terna  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es admisible en  $[0, 2\pi]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Además, todas las medidas son absolutamente continuas y se tiene

$$\rho'_n(\theta) = \frac{\cos(n\theta)}{2} + 1 \geq 1/2, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \rho'(\theta) \equiv 1.$$

Llamamos

$$c_{n,m} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\rho_n(\theta), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Un cálculo fácil muestra que  $c_{n,0} = 1$ ,  $c_{n,-m} = c_{n,m}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ; si  $m > 0$  se tiene  $c_{m,m} = 1/4$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , y en el resto de los casos los momentos  $c_{n,m}$  son cero. A partir de los momentos (véase, por ejemplo, el capítulo 1 de [116]) se construyen los polinomios ortonormales mediante la fórmula

$$\varphi_{n,m}(z) = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_{n,m-1} \Delta_{n,m}|}} \begin{vmatrix} c_{n,0} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,m-1} & c_{n,m} \\ c_{n,-1} & c_{n,0} & \cdots & c_{n,m-2} & c_{n,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n,-m+1} & c_{n,-m+2} & \cdots & c_{n,0} & c_{n,1} \\ 1 & z & \cdots & z^{m-1} & z^m \end{vmatrix}, \quad (2.56)$$

donde

$$\Delta_{n,m} = \begin{pmatrix} c_{n,0} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,m-1} & c_{n,m} \\ c_{n,-1} & c_{n,0} & \cdots & c_{n,m-2} & c_{n,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n,-m+1} & c_{n,-m+2} & \cdots & c_{n,0} & c_{n,1} \\ c_{n,-m} & c_{n,-m+1} & \cdots & c_{n,-1} & c_{n,0} \end{pmatrix}.$$

En nuestro ejemplo,  $\Delta_{n,m}$  es la matriz identidad si  $m < n$  y

$$|\Delta_{n,n}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{16}, \quad (2.57)$$

desarrollando por el segundo elemento de la diagonal  $n-1$  veces. Si los polinomios  $\varphi_{n,n}$  cumplieran la tesis del teorema 2.2 igualmente verificarían las fórmulas (2.18) y (2.20), por ejemplo. Sin embargo, teniendo en cuenta (2.16) y (2.57) obtenemos

$$\Phi_{n,n}^2(0) = 1 - \frac{\alpha_{n,n-1}^2}{\alpha_{n,n}^2} = 1 - \frac{|\Delta_{n,n-2}\Delta_{n,n}|}{|\Delta_{n,n-1}^2|} = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16},$$

que contradice (2.18). De hecho, podemos calcular, con ayuda de la fórmula (2.56), los polinomios ortonormales  $\varphi_{n,n}$ :

$$\varphi_{n,n}(z) = \frac{4}{\sqrt{15}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}.$$

El coeficiente de  $z^n$  es  $4|\Delta_{n,n-1}|/\sqrt{15} = 4/\sqrt{15}$ , los coeficientes de  $z, \dots, z^{n-1}$  son cero, pues al desarrollar el determinante por el elemento  $z^i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  queda

un determinante con una fila de ceros. Por último, el término independiente es

$$\frac{4(-1)^n}{\sqrt{15}} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1/4 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{-1}{\sqrt{15}}.$$

Así  $\varphi_{n,n}(z) = (4z^n - 1)/\sqrt{15}$ . Análogamente se puede ver que  $\varphi_{n,m}(z) = z^m$  si  $m < n$ .

Veamos ahora, con otro ejemplo, que las hipótesis del teorema 2.10 no implican las del 2.2. Consideramos  $d\rho_n(\theta) = f_n(\theta) d\theta/2\pi$ , donde

$$f_n(\theta) = \begin{cases} 1 + n\pi & \text{si } \theta \in [\pi - 1/n, \pi + 1/n] \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como antes, tomamos  $W_n(z) = z^n$ . Es fácil ver que

$$d\rho_n(\theta) \xrightarrow{*} d\rho(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi} + \delta_\pi, \quad n \rightarrow \infty.$$

Además, ya que  $\rho' \equiv 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \log \rho'_n(\theta) d\theta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \log f_n(\theta) d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi - \frac{1}{n}}^{\pi + \frac{1}{n}} \log(1 + n\pi) d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \log(1 + n\pi) = 0 = \int_0^{2\pi} \log \rho'(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Luego  $(\{\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  cumple las hipótesis del teorema 2.10 para todo  $k \in \mathbb{Z}$  y, por tanto, los polinomios  $\varphi_{n,n+k}$  verifican

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k}(z)}{z^{n+k}} = 1, \quad (2.58)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\{z : |z| > 1\}$ . De aquí es fácil probar que los polinomios  $\varphi_{n,n+k}$  satisfacen una relación asintótica del tipo (2.20). En efecto, a partir de (2.58) tenemos

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_{n,n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi_{n,n+k}^*(0)}.$$

Teniendo en cuenta este límite y (2.16), llegamos a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n,n+k+1}^2(0) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n,n+k}^2}{\alpha_{n,n+k+1}^2} = 0.$$

De aquí se prueba (2.20), usando el principio del módulo máximo y la relación de recurrencia (2.14). Sin embargo, por otro lado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\rho'_n(\theta) - \rho'(\theta)| d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi - \frac{1}{n}}^{\pi + \frac{1}{n}} n\pi d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Este segundo ejemplo muestra que las condiciones que aparecen en la definición de admisibilidad fuerte, si bien no es posible eliminarlas del todo, deben poder debilitarse o, al menos, ser sustituidas por otras diferentes con las que no guarden relaciones de implicación. Tema aparte es encontrar condiciones adicionales para que las hipótesis del teorema 2.10 impliquen las del teorema 2.2. Al no disponer de resultados analíticos concluyentes dejamos estas cuestiones abiertas.

## § II.8 Convergencia relativa

Plantaremos el problema de la convergencia relativa para medidas cuyo soporte esté contenido en la circunferencia unidad, si bien es posible describirlo sin dificultad en una situación más general. Sea  $\rho$  una medida de Borel finita y positiva en  $[0, 2\pi]$ . Sea  $h$  una función no negativa en  $[0, 2\pi]$  tal que  $h \in L^1(d\rho)$ . Denotamos por  $\varphi_n(d\rho)$  al  $n$ -ésimo polinomio ortonormal respecto a la medida  $d\rho$  y por  $\varphi_n(hd\rho)$  al correspondiente polinomio de la medida  $hd\rho$ . El problema de la convergencia relativa (o comparativa) consiste en encontrar condiciones para que exista el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(hd\rho)/\varphi_n(d\rho)$  y calcular su expresión. Esto puede considerarse una extensión de la teoría de Szegő ya que si  $d\rho = d\theta/(2\pi)$  se tiene  $\varphi_n(d\rho) = z^n$ . En el caso de que las medidas  $hd\rho$  y  $d\rho$  pertenezcan ambas a la clase de Szegő, la aplicación directa de la fórmula (2.51) implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(hd\rho)(z)}{\varphi_n(d\rho)(z)} = \frac{S(h\rho'; z)}{S(\rho'; z)} = S(h; z), \quad |z| > 1. \quad (2.59)$$

Este resultado no es completamente satisfactorio, pues para la existencia del segundo miembro de la igualdad anterior sólo es necesario que  $\log h \in L^1[0, 2\pi]$ . Por ello, las investigaciones se han centrado en buscar las condiciones más débiles posibles para que se verifique (2.59), cuestión que permanece todavía abierta. Sin embargo, es sabido que la condición necesaria  $\log h \in L^1[0, 2\pi]$  no es suficiente. Véase [95] para más comentarios al respecto.

El primer problema de convergencia comparativa fue planteado por A. A. Gonchar en [42], al estudiar la convergencia de los aproximantes Padé a funciones meromorfas tipo Markov. En su trabajo obtuvo una fórmula del tipo (2.59) (la medida  $\rho$  soportada en un intervalo real) bajo las hipótesis de que  $h$  fuera una fracción racional con polos fuera del soporte de  $\rho$  y  $\rho' > 0$  en casi todo punto. Véase también, en relación con este tema, [62].

En toda su generalidad, el problema de la convergencia relativa fue planteado primero por P. Nevai en [77]; más tarde, fue estudiado por Rakhmanov, [95], y Máté, Nevai y Totik, [69] y [72]. En estos trabajos, aparte de otros resultados, se encuentran teoremas que garantizan la existencia del límite (2.59) imponiendo a la función  $h$  condiciones no demasiado restrictivas. Asimismo hay fórmulas comparativas sobre el soporte de la medida con hipótesis tipo Lipschitz sobre  $h$ . En [64] se demuestran resultados análogos para polinomios ortogonales respecto a medidas variantes, a fin de trasladar los teoremas a medidas con soporte en el eje real. El propósito de esta sección es demostrar alguna de las fórmulas que aparecen en los trabajos anteriores para una clase general de medidas variantes, aquellas que verifican la condición de admisibilidad fuerte, que son el objeto de estudio del presente capítulo.

En toda la sección se entenderá que  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Además mantenemos las notaciones anteriores con la añadidura que utilizaremos  $\varphi_{n,m}(d\sigma_n)$  para denotar al polinomio de grado  $m$  ortonormal con respecto a la medida  $d\sigma_n$ . Necesitamos primero el siguiente lema.

**Lema 2.2** *Sea  $h$  una función medible Borel no negativa en  $[0, 2\pi]$ .*

- a) *Si existe un polinomio  $Q$  tal que  $|Q(z)|h^{-1}$  está acotada en  $[0, 2\pi]$  y la terna  $(\{hd\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces, para cualquier función  $f$  Riemann integrable en  $[0, 2\pi]$  y para cada*



$k \in \mathbb{Z}$  fijo, se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) |Q(z)|^2 \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(h d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}(z) \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) |Q(z)|^2 h^{-1}(\theta) d\theta. \quad (2.60)$$

b) Si existe un polinomio  $Q$  tal que  $|Q(z)|h$  está acotada en  $[0, 2\pi]$  y la terna  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces, para cualquier función  $f$  Riemann integrable en  $[0, 2\pi]$  y para cada  $k \in \mathbb{Z}$  fijo, se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) |Q(z)|^2 \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(h d\sigma_n)}(z) \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) |Q(z)|^2 h(\theta) d\theta. \quad (2.61)$$

DEMOSTRACIÓN. Los enunciados a) y b) se prueban usando los mismos argumentos; llevaremos a cabo la demostración del apartado a). Más aún, para simplificar la notación, sólo consideraremos el caso  $k = 0$  (la prueba es análoga para un  $k$  arbitrario) y usaremos los siguientes convenios en la notación

$$\varphi_{n,m} = \varphi_{n,m}(d\sigma_n), \quad \psi_{n,m} = \varphi_{n,m}(h d\sigma_n), \quad \varphi_n = \varphi_{n,n}, \quad \psi_n = \psi_{n,n}.$$

Sea  $T_m$  un polinomio trigonométrico arbitrario de grado  $m \leq n$ ; entonces (véase [36], capítulo V, teorema 2.2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{T_m(\theta)}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta) d\sigma_n(\theta).$$

Escojamos  $Q$  de grado  $j$  y  $m \leq n - j$ ; entonces el grado del polinomio trigonométrico  $T_m(\theta)|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2$  es igual a  $n$  y de la igualdad anterior se deduce que

$$\int_0^{2\pi} \frac{T_m(\theta)|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta) h^{-1} |Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2 h d\sigma_n(\theta). \quad (2.62)$$

Como  $(\{h d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  y  $|Q(z)|h^{-1}$  está acotada en  $[0, 2\pi]$ , las fórmulas (2.27) y (2.62) implican

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} T_m(\theta) \frac{|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta) h^{-1} |Q(z)|^2 d\theta. \quad (2.63)$$

Por otra parte,

$$\left| \int_0^{2\pi} T_m(\theta) \left| \frac{Q\psi_{n,n-j-m}(z)}{\varphi_n}(z) \right|^2 d\theta - \int_0^{2\pi} T_m(\theta) \left| \frac{Q\psi_n(z)}{\varphi_n}(z) \right|^2 d\theta \right| \leq$$

$$\sup_{|z|=1} \left| 1 - \left| \frac{\psi_n}{\psi_{n,n-j-m}}(z) \right|^2 \right| \int_0^{2\pi} |T_m(\theta)| \frac{|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta.$$

Según (2.63), (2.19) y (2.20) (aplicado a  $h d\sigma_n$ ) el segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero y, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} T_m(\theta) \frac{|Q\psi_n(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta) |Q(z)|^2 h^{-1} d\theta.$$

En este punto pueden usarse argumentos de aproximación (como los del teorema 1.5.4 de [113]) y demostrar que el polinomio trigonométrico  $T_m$  puede sustituirse por una función Riemann integrable arbitraria. Esto prueba (2.60); (2.61), como dijimos anteriormente, se obtiene de modo análogo.

□

Podemos ahora demostrar convergencia relativa de los polinomios ortonormales con respecto a  $h d\sigma_n$  y  $d\sigma_n$ .

**Teorema 2.12** *Sea  $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Sea  $h$  una función medible Borel en  $[0, 2\pi]$  verificando:*

1. *Existe un polinomio  $Q$  tal que  $|Q(z)|h^{\pm 1}(\theta)$  está acotada en  $[0, 2\pi]$ .*
2.  *$h \geq 0$  on  $[0, 2\pi]$ .*
3.  *$(\{hd\rho_n\}, \{W_n\}, k)$  es fuertemente admisible en  $[0, 2\pi]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k}(hd\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}(z) = S(h; z), \quad (2.64)$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de  $\{z : |z| > 1\}$ .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, observemos que las hipótesis 1 y 2 implican  $\log h \in L^1([0, 2\pi])$  (por lo que existe la función de Szegő  $S(h; z)$ ). Nos será más cómodo probar la relación equivalente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k}^*(hd\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}^*(d\sigma_n)}(z) = S^*(h, z) = \overline{S(h, 1/\bar{z})}, \quad (2.65)$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de  $U$  (la fórmula (2.65) se obtiene de (2.64) haciendo el cambio de variable  $z \rightarrow 1/\bar{z}$  y conjugando).

Teniendo en cuenta (2.21), vemos que es suficiente probar (2.65) para  $k = 0$ . Como antes, para simplificar la notación, ponemos  $\varphi_n = \varphi_n(d\sigma_n)$ ,  $\varphi_n^* = \varphi_n^*(d\sigma_n)$ ,  $\psi_n = \varphi_n(hd\sigma_n)$ ,  $\psi_n^* = \varphi_n^*(hd\sigma_n)$ .

Podemos suponer que el polinomio  $Q$  de las hipótesis del teorema no vale cero en  $U$  pues tales ceros no influyen en la acotación de  $|Q|h^{\pm 1}$  en  $[0, 2\pi]$ . Por tanto, las funciones  $Q\psi_n^*/\varphi_n^*$  son analíticas y nunca se anulan en  $U$ . Por lo que, utilizando la fórmula de Poisson,

$$\log \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(e^{it}) \right|^2 P(z, e^{it}) dt,$$

donde  $P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}$  denota el núcleo de Poisson. Usando la desigualdad de Jensen, se obtiene

$$\left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(e^{it}) \right|^2 P(z, e^{it}) dt.$$

Como  $|\varphi_n(e^{it})| = |\varphi_n^*(e^{it})|$  y  $|\psi_n(e^{it})| = |\psi_n^*(e^{it})|$ , gracias a (2.60), obtenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{-1}(e^{it}) |Q(e^{it})|^2 P(z, e^{it}) dt, \quad (2.66)$$

lo que, a su vez, implica que  $\{\psi_n^*/\varphi_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ , está uniformemente acotada en subconjuntos compactos de  $U$  (recordemos que  $Q$  no tiene ceros en  $U$ ). Consideremos ahora una subsucesión arbitraria  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  tal que

$$\lim_{n \in \Lambda} \frac{\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) = S_\Lambda(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $U$ . En virtud de lo que fue dicho anteriormente es suficiente probar que para cualquier tal subsucesión  $\Lambda$  se tiene  $S^* \equiv S_\Lambda$ .

Sea  $r \in (0, 1)$  arbitrario. Usando (2.60) una vez más, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(QS_\Lambda)(re^{it})|^2 dt = \lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{Q\psi_n^*(re^{it})}{\varphi_n^*} \right|^2 dt \leq$$

$$\lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{Q\psi_n^*(e^{it})}{\varphi_n^*} \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{-1}(t) |Q(e^{it})|^2 dt.$$

Así,  $QS_\Lambda \in \mathbb{H}_2$  y el límite  $\lim_{r \rightarrow 1} (QS_\Lambda)(re^{it})$  existe en casi todo punto  $t \in [0, 2\pi]$ . Por otra parte, de acuerdo con (2.66), para cada  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  fijo, tenemos

$$|(QS_\Lambda)(rz)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{-1}(t) |Q(e^{it})|^2 P(rz, e^{it}) dt.$$

Es bien sabido que el límite del segundo miembro de esta desigualdad existe, cuando  $r \rightarrow 1$ , para casi todo  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Por tanto, tomando dicho límite en ambos miembros y aplicando el teorema de Fatou (véase, por ejemplo, el capítulo 11 de [97]), se obtiene que  $|S_\Lambda(z)|^2 \leq h^{-1}(\theta)$  en casi todo punto de  $[0, 2\pi]$ .

Probemos ahora que la desigualdad contraria también se verifica en casi todo punto. De hecho, razonando de la misma manera que antes, obtenemos

$$\log \left| \frac{Q\varphi_n^*(z)}{\psi_n^*} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{Q\varphi_n^*(e^{it})}{\psi_n^*} \right|^2 P(z, e^{it}) dt,$$

lo cual, con la ayuda de la desigualdad de Jensen y (2.61) implica

$$|(QS_\Lambda^{-1})(rz)|^2 = \lim_{n \in \Lambda} \left| \frac{Q\varphi_n^*(rz)}{\psi_n^*} \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) |Q(e^{it})|^2 P(rz, e^{it}) dt,$$

donde  $z$  es arbitrario. Tomando límites cuando  $r \rightarrow 1$ , obtenemos  $|S_\Lambda^{-1}(z)|^2 \leq h(\theta)$  en casi todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Esto, junto con la desigualdad anterior, da  $|S_\Lambda(z)|^2 = h^{-1}(\theta)$  en casi todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Más aún,  $S_\Lambda^{-1}$  además de  $S_\Lambda$  pertenecen a  $\mathbb{H}_2$  por lo que  $\log S_\Lambda$  pertenece a  $\mathbb{H}_1$  y se tiene, utilizando (2.50)

$$\begin{aligned} \log |S_\Lambda(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |S_\Lambda(e^{it})| P(z, e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log h^{-1}(t) P(z, e^{it}) dt = \log |S^*(z)|, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $S_\Lambda$  y  $S^*$  son iguales salvo una constante imaginaria, pero  $S^*(0) > 0$  y

$$S_\Lambda(0) = \lim_{n \in \Lambda} \frac{\alpha_{n,n}(hd\sigma_n)}{\alpha_{n,n}(d\sigma_n)} \geq 0.$$

Por tanto  $S_\Lambda(z) \equiv S^*(z)$ .

□

Como consecuencia casi directa de todos los resultados acumulados anteriormente, se puede demostrar un teorema de convergencia relativa para polinomios ortogonales con respecto a medidas cuyo soporte sea un intervalo real. Usaremos la misma notación que en la sección § II.5.

**Teorema 2.13** *Sea  $(\{d\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k)$  fuertemente admisible en  $[-1, 1]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Sea  $h$  una función medible Borel en  $[-1, 1]$  que verifica*

1. *Existe un polinomio  $Q$  tal que  $|Q(x)|h^{\pm 1}(x)$  está acotada en  $[-1, 1]$ .*
2.  *$h \geq 0$  on  $[-1, 1]$ .*
3.  *$(\{hd\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k)$  es fuertemente admisible en  $[-1, 1]$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n,n+k}(hd\tau_n)}{l_{n,n+k}(d\tau_n)}(x) = S(h^*(\theta)|\sin \theta|; \Psi(x)), \quad (2.67)$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  y  $h^*(\theta) = h(\cos \theta)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Consideramos la función  $h^*$  definida en  $[0, 2\pi]$  mediante  $h^*(\theta) = h(\cos \theta)$ . Las medidas  $d\sigma_{2n}$  y los polinomios  $\varphi_{2n,m}(d\sigma_{2n})$  y  $\varphi_{2n,m}(h^*d\sigma_{2n})$  tienen el mismo significado que en la sección § II.5. Como en el teorema anterior, hagamos  $k = 0$  (el caso  $k$  arbitrario es análogo) y pongamos

$$\varphi_n = \varphi_{2n,2n}(d\sigma_{2n}), \quad \varphi_n^* = \varphi_{2n,2n}^*(d\sigma_{2n}), \quad \psi_n = \varphi_{2n,2n}(h^*d\sigma_{2n}), \quad \psi_n^* = \varphi_{2n,2n}^*(h^*d\sigma_{2n}).$$

Denotemos, por último, a los polinomios mónicos asociados a  $\psi_n$  y  $\varphi_n$  por  $\Phi_n$  y  $\tilde{\Phi}_n$ , respectivamente.

Debido a la relación (2.29) (aplicada a  $l_{n,n}(hd\tau_n)$  y  $l_{n,n}(d\tau_n)$ ) y siendo  $z = \Psi(x)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{l_{n,n}(hd\tau_n)}{l_{n,n}(d\tau_n)}(x) &= \frac{\psi_n(z) + \psi_n^*(z)}{\varphi_n(z) + \varphi_n^*(z)} \frac{\sqrt{1 + \Phi_n(0)}}{\sqrt{1 + \tilde{\Phi}_n(0)}} \\ &= \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} \frac{1 + \frac{\psi_n^*(z)}{\psi_n(z)}}{1 + \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)}} \frac{\sqrt{1 + \Phi_n(0)}}{\sqrt{1 + \tilde{\Phi}_n(0)}}, \quad x \notin [-1, 1]. \end{aligned}$$

Y ahora el resultado se deduce directamente del teorema 2.12, teniendo en cuenta (2.18) y (2.22).

□

## Capítulo III

# Medidas variantes reales asociadas con polinomios de Stieltjes

### § III.1 Introducción.

Sea  $\omega$  una función no negativa en el intervalo  $[-1, 1]$  tal que  $\omega \in L^1[-1, 1]$ . Denotamos la medida de Lebesgue en  $[-1, 1]$  por  $dx$ . Sea  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios ortonormales con respecto al peso  $\omega$ ; es decir,  $p_n(x) = \kappa_n x^n + \dots$ ,  $\kappa_n > 0$ , y

$$\int_{-1}^1 p_m(x) p_k(x) \omega(x) dx = \delta_{km}. \quad (3.1)$$

Es bien conocido y fácil de comprobar que existe un único polinomio mónico  $S_{n+1}$  de grado  $n + 1$  que verifica las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 x^k S_{n+1}(x) p_n(x) \omega(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

El polinomio  $S_{n+1}$  se llama el  $(n + 1)$ -ésimo polinomio de Stieltjes con respecto al peso  $\omega$ . En 1894, en una de sus cartas a Hermite [110], Stieltjes considera la función de Legendre de segunda clase, es decir,

$$g_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{z - x} dx,$$



donde  $P_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Legendre ( $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida de Lebesgue en  $[-1, 1]$ ) y observa que se cumple el siguiente desarrollo para  $z \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{g_n(z)} = S_{n+1} + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \quad n \geq 2.$$

Con ayuda del teorema de Cauchy comprueba que  $S_{n+1}$  cumple las relaciones de ortogonalidad (3.2) y, por tanto, queda determinado por ellas. En este punto, Stieltjes conjetura que todos los ceros de  $S_{n+1}$  son reales, que están en  $(-1, 1)$  y que se entrelazan con los ceros de  $P_n$ . Dichas propiedades no son en absoluto evidentes ya que el polinomio  $S_{n+1}$  es ortogonal con respecto a la medida variante  $P_n(x) dx$ , que no es positiva sino real. Años más tarde (1934), Szegő examina los polinomios  $S_{n+1}$ , prueba la conjetura de Stieltjes y extiende el resultado para todos los polinomios asociados con pesos ultraesféricos  $w_\lambda$ ,  $w_\lambda(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 2$ , [113]. Aparentemente, los polinomios de Stieltjes permanecieron semio olvidados varias décadas hasta que el interés resurgió y se ha mantenido en los últimos veinte años motivado por la relación de estos polinomios con la fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod (para más detalles a este respecto, véase la sección § V.3). Debido a esta conexión, el estudio moderno de los polinomios de Stieltjes ha estado marcado hasta ahora por su uso en la cuadratura de Gauss-Kronrod. Esto ha causado que la investigación se haya centrado en pesos para los cuales la fórmula de cuadratura es significativa para funciones de una clase tan amplia como sea posible, es decir para aquellos pesos que verifican las propiedades que Stieltjes conjeturó en el caso Legendre. Nosotros hemos trasladado la atención a los propios polinomios de Stieltjes y al estudio de sus propiedades asintóticas sin considerar su aplicación inmediata a fórmulas de cuadratura. El objetivo de este capítulo es describir clases generales de pesos para los cuales los correspondientes polinomios de Stieltjes tengan comportamiento asintótico relativo a la raíz  $n$ -ésima, del cociente o tipo Szegő. También daremos información sobre el comportamiento asintótico de los ceros. En el capítulo V aplicaremos estos resultados a la aproximación de funciones tipo Markov por medio de aproximantes racionales con polos parcialmente prefijados (aproximantes tipo Padé, según la terminología empleada en los últimos años). Como consecuencia de los resultados obtenidos en aproximación racional, daremos estimaciones de la



razón de convergencia de la fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod para funciones que son analíticas en un entorno del conjunto de integración.

Sea  $\mu$  una medida de Borel finita positiva en la recta real  $\mathbb{R}$  cuyo soporte compacto  $S(\mu)$  contiene infinitos puntos. Sea  $\mu' = d\mu/dx$  la derivada de Radon-Nykodym de  $\mu$  con respecto a la medida de Lebesgue  $dx$ .

El  $n$ -ésimo POLINOMIO DE STIELTJES con respecto a  $\mu$  se define por medio de las ecuaciones (3.1) y (3.2) sustituyendo  $\omega(x) dx$  por  $d\mu(x)$ . Nos referiremos a  $s_n = \kappa_{n-1} S_n$  como el  $n$ -ésimo POLINOMIO DE STIELTJES NORMALIZADO, donde  $\kappa_{n-1}$  es el coeficiente conductor de  $p_{n-1}$ . Esta notación nos permite dar a las fórmulas una expresión más cerrada, pero, desde luego, nada tiene que ver con la pretensión de ortonormalizar los polinomios de Stieltjes.

En lo sucesivo,  $\text{cap}(A)$  representará la capacidad logarítmica del conjunto  $A$  (véase la sección § III.3 para la definición). Manteniendo la notación empleada en la sección § I.2, definimos el conjunto

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : g_{\Omega}(z, \infty) \leq \max_{\zeta \in \text{Co}(S(\mu))} g_{\Omega}(\zeta, \infty) \right\}.$$

En el caso que  $S(\mu)$  sea un intervalo entonces el conjunto  $E$  coincide con  $S(\mu)$ , mientras que si, por ejemplo,  $S(\mu) = [0, 1] \cup [2, 3]$  entonces  $E$  es la región limitada por una curva del tipo lemniscata que rodea ambos intervalos. Los principales resultados de este capítulo, en una versión simplificada, se pueden resumir en el siguiente teorema.

**Teorema 3.14** *Se verifican los siguientes resultados*

1. Sea  $\mu \in \text{Reg}$  y  $\text{cap}(S(\mu)) > 0$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_{n+1}(z)|^{1/n} = \exp\{g_{\Omega}(z, \infty)\},$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus E$ .*

2. Si  $\mu \in M(a, b)$  con  $a \neq 0$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}(z)}{s_n(z)} = \Psi \left( \frac{z - b}{a} \right),$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus S(\mu)$ .*

3. Si  $\mu \in \mathbf{S}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}(z)}{\Psi(z)^n} = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{2\pi}} S(\mu'(\cos \theta) |\sin(\theta)|; \Psi(z)),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

Observemos que los polinomios de Stieltjes en estas importantes clases de medidas, desde el punto de vista asintótico, se comportan esencialmente como los polinomios ortonormales fuera del soporte de la medida; especialmente si el soporte de la medida es un intervalo. Cuando el soporte de la medida no es un intervalo surgen algunas diferencias como veremos en la última sección de este capítulo. Allí daremos un ejemplo que ilustra estas diferencias y muestra que la parte 1 del teorema 3.14, en cierto sentido, no se puede mejorar.

Queremos destacar el carácter singular de este teorema. Por un lado, la mayor parte de los métodos conocidos y utilizados para probar comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales (variantes), como los señalados en la sección § II.1, usan de un modo esencial que la medida es positiva ya que se apoyan en la propiedad de extremalidad de dichos polinomios. H. Stahl [103] ha probado resultados relevantes en el caso de ortogonalidad compleja no hermitiana pero que no se aplican en esta situación pues exige que el peso analítico tenga sus puntos singulares contenidos en un conjunto de capacidad cero. Por otro lado, es sabido (cf. [102]) que los polinomios ortogonales con respecto a medidas reales pueden tener comportamiento asintótico arbitrario. Como ejemplo, tomado de [102], consideremos un peso tan sencillo como

$$w(\theta) = (\cos \theta - \cos(\pi\alpha_1))(\cos \theta - \cos(\pi\alpha_2)),$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2$  son números algebraicos con  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$  y  $\alpha_1, \alpha_2$  racionalmente independientes. Entonces puede probarse que los ceros de los polinomios ortogonales correspondientes son densos en  $\mathbb{C}$ . Más aún, el hecho de que el peso  $w(\theta)$  tenga dos ceros es el responsable, en este caso, del “mal” comportamiento asintótico de los polinomios. Entre otras consecuencias, estos hechos indican la dificultad de encontrar métodos generales para probar convergencia en el caso de medidas reales. De

hecho, en la demostración del teorema 3.14 se hace uso esencial de las características propias de los polinomios de Stieltjes.

No queremos terminar esta sección sin citar resultados positivos referentes al comportamiento asintótico de polinomios ortogonales con respecto a medidas complejas; además de los ya comentados [103] donde se estudia la distribución asintótica de ceros, se pueden encontrar fórmulas sobre convergencia del cociente en [62] y en [11]; en este último trabajo se extiende la clase de Nevai-Blumenthal al caso en que los límites de los coeficientes de recurrencia tomen valores complejos.

## § III.2 Polinomios de Stieltjes variantes

Todos los resultados que aparecen en el resto del capítulo se darán para el caso más general de polinomios de Stieltjes variantes, concepto que presentamos en esta sección junto con sus propiedades más importantes. Establezcamos primero la notación necesaria. Como antes,  $\mu$  denota una medida de Borel finita y positiva en la recta real  $\mathbb{R}$  con soporte compacto  $S(\mu)$  que contiene infinitos puntos.

Sea  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de polinomios mónicos con coeficientes reales tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{gr } w_n = i_n$ ,  $0 \leq i_n \leq 2n + 1$ ; y  $w_n > 0$  en  $\text{Co}(S(\mu))$  (la envoltura convexa de  $S(\mu)$ ). Si  $i_n < 2n + 1$ , sea  $w_{n,i} = \infty$  para  $1 \leq i \leq 2n + 1 - i_n$ ; si,  $i_n > 0$ , entonces  $\{w_{n,i}\}_{2n+1-i_n+1 \leq i \leq 2n+1}$ , denota el conjunto de ceros de  $w_n$ . Por  $L$  denotamos el conjunto de puntos límite de los ceros de  $\{w_{n,i}\}_{1 \leq i \leq 2n+1}$  cuando  $n$  tiende a infinito. En lo sucesivo, supondremos que  $L$ , que es un conjunto cerrado, está contenido en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . De hecho, cuando el soporte de la medida no es un intervalo, es necesario que  $L$  esté contenido en un conjunto más pequeño como veremos más adelante. La positividad de  $w_n$  en  $\text{Co}(S(\mu))$  se supone para mayor comodidad en el proceso de normalización, pero sería suficiente que para todo  $n$  el polinomio  $w_n$  tuviera signo constante en dicho conjunto.

Pongamos  $d\mu_n = d\mu/w_n$ . Obviamente, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{S(\mu)} \frac{d\mu(x)}{w_n(x)} < +\infty,$$

de esta manera, se puede construir la tabla de polinomios  $\{p_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ , tal que

$p_{n,m}(z) = \kappa_{n,m} z^m + \dots$ ,  $\kappa_{n,m} > 0$ , es el  $m$ -ésimo polinomio ortonormal con respecto a  $\mu_n$ . Estos polinomios están unívocamente determinados por tener coeficiente conductor positivo y satisfacer las relaciones

$$\int_{S(\mu)} p_{n,k}(x) p_{n,m}(x) d\mu_n(x) = \delta_{k,m},$$

siguiendo la misma construcción que hicimos en la sección § II.2.

Las FUNCIONES DE SEGUNDA CLASE con respecto a  $\mu_n$  juegan un papel relevante en nuestros razonamientos. Se definen como

$$g_{n,m}(z) = \int \frac{p_{n,m}(x)}{z-x} d\mu_n(x), \quad z \in \Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu).$$

Estas funciones son analíticas en  $\Omega$  y  $g_{n,m}(\infty) = 0$ . Debido a las relaciones de ortogonalidad satisfechas por  $p_{n,m}$  con respecto a la medida  $\mu_n$ ,  $z = \infty$  es un cero de  $g_{n,m}$  de multiplicidad  $m+1$ .

Los siguientes dos lemas son bien conocidos y fáciles de comprobar (véase, por ejemplo, la demostración del teorema 6.1.8 en [108]).

**Lema** *Se cumple*

$$g_{n,m}(z) p_{n,m}(z) = \int \frac{p_{n,m}^2(x)}{z-x} d\mu_n(x), \quad z \in \Omega. \quad (3.3)$$

**Lema** *Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ , entonces existen constantes positivas  $M_1, M_2$ , independientes de  $n$  y  $m$ , que verifican*

$$M_1 \leq |g_{n,m}(z) p_{n,m}(z)| \leq M_2, \quad z \in K. \quad (3.4)$$

*En particular,  $g_{n,m}$  no tiene ceros en  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ .*

Sea  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de polinomios mónicos con coeficientes reales tales que  $\text{gr } v_n = j_n \leq n+1$  y  $v_n > 0$  en  $\text{Co}(S(\mu))$ . Sea  $v_{n,j} = \infty$  para  $1 \leq j \leq n+1-j_n$ ; así,  $\{v_{n,j}\}_{n+1-j_n+1 \leq j \leq n+1}$  denota el conjunto de ceros de  $v_n$ . También supondremos que el conjunto de puntos límite de los ceros de  $\{v_{n,j}\}_{1 \leq j \leq n+1}$  cuando  $n$  tiende a infinito está contenido en  $\mathbf{L}$ .

Sea  $\{S_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  una sucesión de polinomios tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{n,m}$  se define como el polinomio mónico de menor grado que cumple

$$\int x^k S_{n,m}(x) p_{n,m-1}(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Hallar  $S_{n,m}$  se reduce a resolver un sistema de  $m$  ecuaciones homogéneas con  $m+1$  incógnitas. Así, siempre existe una solución no trivial.

**Definición 3.4** Llamamos a  $S_{n,m}$  el  $m$ -ésimo polinomio de Stieltjes ortogonal con respecto a la medida variante  $d\mu_n/v_n$ . El polinomio de Stieltjes normalizado  $s_{n,m}$  se define como  $s_{n,m} = \kappa_{n,m-1} S_{n,m}$ .

En el caso que  $w_n \equiv v_n \equiv 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se recuperan los polinomios de Stieltjes clásicos.

**Lema 3.3** Si  $m \geq \text{gr } v_n$ , entonces  $\text{gr } S_{n,m} = m$ .

**DEMOSTRACIÓN.** De la definición de  $S_{n,m}$  es inmediato que  $\text{gr } S_{n,m} \leq m$ . Supongamos que  $\text{gr } S_{n,m} \leq m-1$ . Debido a las relaciones de ortogonalidad satisfechas por  $p_{n,m-1}$  con respecto a la medida  $\mu_n$ , se tiene

$$\int \frac{S_{n,m}(z) - S_{n,m}(x)}{z - x} p_{n,m-1}(x) d\mu_n(x) = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} S_{n,m}(z) g_{n,m-1}(z) &= \int \frac{v_n(x) S_{n,m}(x)}{z - x} p_{n,m-1}(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)} \\ &= v_n(z) \int \frac{S_{n,m}(x)}{z - x} p_{n,m-1}(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad es consecuencia de las relaciones de ortogonalidad que  $S_{n,m}$  verifica con respecto a  $d\mu_n/v_n$  y de la condición  $m \geq \text{gr } v_n$ . Como  $g_{n,m-1}$  no tiene ceros en  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ , cada cero de  $v_n$  con multiplicidad  $k$  es un cero de  $S_{n,m}$  con multiplicidad al menos  $k$ . Por tanto,  $\text{gr } S_{n,m} \geq \text{gr } v_n$ . Por otra parte, sabemos que

$$\int T(x) S_{n,m}(x) p_{n,m-1}(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)} = 0,$$



para cualquier polinomio  $T$  de grado menor que  $m$ . Si ahora escogemos  $T(x) = v_n(x) x^{m-1-\text{gr } S_{n,m}}$  en la relación anterior, obtenemos

$$\int x^{m-1-\text{gr } S_{n,m}} S_{n,m}(x) p_{n,m-1}(x) d\mu_n(x) = 0.$$

Obsérvese que  $\text{gr}(x^{m-1-\text{gr } S_{n,m}} S_{n,m}(x)) = m-1$  y  $p_{n,m-1}$  es ortogonal a cualquier polinomio de grado menor o igual que  $m-1$  con respecto a  $\mu_n$ . Por tanto,  $p_{n,m-1}$  sería ortogonal a sí mismo. Esta contradicción indica que  $\text{gr } S_{n,m} = m$ .

□

Seguidamente obtenemos una expresión integral que relaciona los polinomios de Stieltjes con las funciones de segunda clase.

**Lema 3.4** Si  $m \geq \text{gr } v_n$ , entonces

$$\frac{s_{n,m}(z) - 1/g_{n,m-1}(z)}{v_n(z)} = \frac{1}{g_{n,m-1}(z)} \int \frac{s_{n,m}(x)}{z-x} p_{n,m-1}(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu)) \quad (3.5)$$

y

$$s_{n,m}(z) g_{n,m-1}(z) = 1 + \frac{v_n(z) g_{n,m-1}(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{v_n(\zeta) g_{n,m-1}(\zeta) (\zeta - z)}, \quad (3.6)$$

donde  $\gamma$  es una curva cerrada simple orientada positivamente que rodea  $\text{Co}(S(\mu))$  tal que  $L$  y  $z$  están contenidos en la componente conexa no acotada de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ .

**DEMOSTRACIÓN.** De las relaciones de ortogonalidad de  $p_{n,m-1}$  con respecto a la medida  $\mu_n$ , se deduce

$$\int \frac{S_{n,m}(z) - S_{n,m}(x)}{z-x} p_{n,m-1}(x) d\mu_n(x) = \int \frac{z^m - x^m}{z-x} p_{n,m-1}(x) d\mu_n(x) =$$

$$\int x^{m-1} p_{n,m-1}(x) d\mu_n(x) = \frac{1}{\kappa_{n,m-1}}.$$

Reescribiendo esta igualdad y usando la ortogonalidad de  $S_{n,m}$  con respecto a  $d\mu_n/v_n$ , se tiene que

$$g_{n,m-1}(z) s_{n,m}(z) = 1 + \int \frac{s_{n,m}(x)}{z-x} p_{n,m-1}(x) d\mu_n(x) =$$

$$1 + \int \frac{v_n(x) s_{n,m}(x)}{z-x} p_{n,m-1}(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)} = 1 + v_n(z) \int \frac{s_{n,m}(x)}{z-x} p_{n,m-1}(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)}.$$

La primera fórmula del lema es equivalente a esta expresión. De (3.5) y de las relaciones de ortogonalidad de  $p_{n,m-1}$  y  $s_{n,m}$  se deduce

$$\frac{s_{n,m}(z) - 1/g_{n,m-1}(z)}{v_n(z)} = \left( \int \frac{p_{n,m-1}^2(x)}{1-x/z} d\mu_n(x) \right)^{-1} \int \frac{x s_{n,m}(x)}{z-x} p_{n,m-1}^2(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)}.$$

Por tanto, esta función es analítica en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  y tiene un cero de orden al menos 1 en infinito. Usando la fórmula integral de Cauchy con una curva  $\gamma$  como se indica en el enunciado del lema, se obtiene

$$\frac{s_{n,m}(z) - 1/g_{n,m-1}(z)}{v_n(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{s_{n,m}(\zeta) - 1/g_{n,m-1}(\zeta)}{v_n(\zeta)(z-\zeta)} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{v_n(\zeta) g_{n,m-1}(\zeta) (\zeta-z)}.$$

Reescribiendo esta fórmula de manera adecuada, se llega a (3.6). □

Obsérvese que  $g_{n,m-1}(z)$  puede tener ceros en  $\text{Co}(S(\mu)) \setminus S(\mu)$ ; por tanto, la función  $1/g_{n,m-1}(z)$  puede tener polos en dicho conjunto. Ésta es la única razón por la que no podemos, en general, escoger una curva  $\gamma$  más cercana a  $S(\mu)$  que la indicada en el lema 3.4. Hecho que tendrá consecuencias interesantes, como veremos más adelante.

### § III.3 Teoría del potencial logarítmico

En el estudio de la convergencia de la raíz  $n$ -ésima de los polinomios ortogonales la teoría del potencial logarítmico juega un papel fundamental. Esto es debido a que el módulo de un polinomio básicamente no es más que la exponencial de un potencial discreto. En esta sección recogemos algunos resultados importantes de la teoría del potencial que serán usados con posterioridad. Para evitar el exceso de referencias en el texto diremos que, salvo alguna excepción, la totalidad de lo que aparece en la presente sección se puede encontrar en [100], [108] y [96].

Los resultados los enunciaremos para un conjunto compacto cualquiera contenido en  $\mathbb{C}$ , que denotaremos por  $K$ , si bien a la hora de aplicarlos  $K$  será  $S(\mu)$  la mayoría de las veces. Sea  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(K)$  el conjunto de todas las medidas positivas de Borel, con soporte contenido en  $K$  y medida de  $K$  igual a 1 (medidas de probabilidad en  $K$ ). Se llama POTENCIAL LOGARÍTMICO asociado a la medida  $\sigma \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(K)$  a la función

$$P(\sigma; z) = \int_K \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\sigma(\zeta) .$$

La ENERGÍA asociada a  $\sigma \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(K)$  se define como

$$I(\sigma) = \int_K \int_K \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\sigma(\zeta) d\sigma(z) = \int_K P(\sigma; z) d\sigma(z) .$$

Se denomina CONSTANTE DE ROBIN de  $K$ , o ENERGÍA DE EQUILIBRIO para  $K$  a

$$I(K) = \inf_{\sigma \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(K)} I(\sigma) .$$

Dado el compacto  $K$ , el número  $\text{cap}(K) = \exp(-I(K))$  se dice que es la CAPACIDAD LOGARÍTMICA de  $K$ . Si  $F$  es un conjunto arbitrario su CAPACIDAD LOGARÍTMICA se define como

$$\text{cap}(F) = \sup_{K \subset F, K \text{ compacto}} \text{cap}(K) .$$

Diremos que una propiedad se satisface CASI DONDEQUIERA (abreviadamente c.d. en lo sucesivo) en el conjunto  $F$  si dicha propiedad se satisface en un conjunto  $A$  de modo que se cumple  $\text{cap}(F \setminus A) = 0$ . Una sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice que CONVERGE EN CAPACIDAD a la función  $f$  en subconjuntos compactos del dominio



$D \subset \mathbb{C}$  si para todo  $\epsilon > 0$  y todo subconjunto compacto  $K$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \{z \in K : |f(z) - f_n(z)| > \epsilon\} = 0.$$

La convergencia débil\* de medidas produce el siguiente efecto sobre los potenciales logarítmicos:

**Principio del descenso** Supongamos que  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$  y que la sucesión de medidas  $\{\sigma_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{\sigma_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{M}_P(K)$ , converge débilmente\* a la medida  $\sigma \in \mathcal{M}_P(K)$ , entonces para toda sucesión  $\{z_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$  tal que  $z_n \rightarrow z$  se tiene que

$$P(\sigma; z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\sigma_n; z_n), \quad z \in \mathbb{C}$$

y además,

$$P(\sigma; z) = \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\sigma_n; z)$$

en todo  $K$  salvo en un conjunto de capacidad logarítmica cero, es decir c.d. en  $K$ .

Un resultado fundamental en la teoría del potencial afirma que si  $K$  es un compacto de  $\mathbb{C}$ , existe una única medida de probabilidad  $\bar{\mu}$  en  $K$ , tal que su energía coincide con la energía de equilibrio de  $K$ . Dicha medida  $\bar{\mu}$  se llama entonces MEDIDA DE EQUILIBRIO DE  $K$ .

**Teorema de Frostman** Supongamos que  $K$  es un compacto,  $K \subset \mathbb{C}$ , tal que  $\text{cap}(K) > 0$ . Entonces existe una medida  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_P(K)$  tal que  $I(\bar{\mu}) = I(K)$  y su potencial  $P(\bar{\mu}; \cdot)$  cumple las siguientes propiedades:

1. Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(\bar{\mu}; z) \leq I(K)$ .
2.  $P(\bar{\mu}; z) = I(K)$  c.d. en  $K$ .
3. Para toda medida  $\sigma \in \mathcal{M}_P(K)$  se tiene que

$$\inf_{z \in K} P(\sigma; z) \leq I(K) \leq \sup_{z \in K} P(\sigma; z).$$

Sea  $a$  un punto cualquiera de  $\Omega$ , la componente conexa no acotada de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ . La FUNCIÓN DE GREEN con polo logarítmico en el punto  $a$  asociada a la región  $\Omega$ , que denotaremos por  $g_{\Omega}(z, a)$  es la única función que cumple las siguientes propiedades:

1.  $g_{\Omega}(z, a)$  es una función no negativa, subarmónica en  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  y armónica en  $\Omega \setminus \{a\}$ .
2.  $g_{\Omega}(z, a) + \log |z - a|$  permanece acotado cuando  $z \rightarrow a$ .
3.  $g_{\Omega}(z, a) = 0$  c.d. en  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ .

Si la capacidad de  $K$  es cero entonces  $g_{\Omega}(z, a) \equiv \infty$ . Las tres propiedades anteriores con el principio del máximo garantizan la unicidad de la función de Green para todo compacto  $K \in \mathbb{C}$ . La función de Green es simétrica en sus argumentos. En el caso que  $a = \infty$  la condición 2 toma la forma

$$g_{\Omega}(z, \infty) - \log |z| \text{ permanece acotado cuando } z \rightarrow \infty.$$

Si  $\text{cap}(K) > 0$  por el Teorema de Frostman sabemos que existe una medida  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(K)$  de equilibrio en  $K$ , que está relacionada con la función de Green mediante la expresión

$$g_{\Omega}(z, \infty) \equiv -P(\bar{\mu}; z) - \log(\text{cap}(K)), \quad z \in \Omega.$$

Sea  $\sigma$  una medida cuyo soporte esté contenido en  $\overline{\Omega}$ , se dice que la medida  $\tilde{\sigma}$  con soporte en  $\partial\Omega$  es el BARRIDO (balayage) de  $\sigma$  si se verifica

1.  $\|\sigma\| = \|\tilde{\sigma}\|$ .
2.  $P(\sigma; z) + c = P(\tilde{\sigma}; z)$  c.d. en  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ,

donde  $c$  es una constante. Dada la medida  $\sigma$  siempre existe su medida barrido  $\tilde{\sigma}$  y la constante  $c$  resulta ser

$$\int_{\Omega} g_{\Omega}(z, \infty) d\sigma(z).$$

Por otro lado, a cada polinomio  $p$  de grado exactamente  $n$ , se le puede asociar la MEDIDA CONTADORA NORMALIZADA DE SUS CEROS,  $\Lambda_p$ , que se define como

$$\Lambda_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{z_j},$$

donde  $z_1, \dots, z_n$  son los ceros de  $p$  repetidos de acuerdo a su multiplicidad y  $\delta_{z_j}$  es la medida de Dirac con masa uno en el punto  $z_j$ . Se dice entonces que una sucesión de polinomios  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  (gr  $p_n = n$ ) tiene DISTRIBUCIÓN ASINTÓTICA DE CEROS  $\nu$  ( $\nu \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\mathbb{C})$ ), si la sucesión de medidas contadoras normalizadas correspondiente  $\{\Lambda_{p_n}\}_{n=0}^{\infty}$  converge en sentido débil\* a la medida  $\nu$ .

Consideramos ahora un compacto  $K \subset \mathbb{C}$  tal que  $\text{cap}(K) > 0$ . Sea  $g$  una función acotada definida sobre la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , continua c.d. en  $\partial\Omega$ . El PROBLEMA DE DIRICHLET GENERALIZADO en  $\Omega$  consiste en encontrar una función  $u$  que sea armónica y acotada en  $\Omega$ , tal que  $\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = g(\zeta)$  c.d. en  $\partial\Omega$ . Es conocido que siempre existe tal función  $u$  y es única. Se dice que un punto  $\zeta_0 \in \partial\Omega$  es REGULAR si se cumple  $\lim_{z \rightarrow \zeta_0} u(z) = g(\zeta_0)$ . Como el problema de Dirichlet generalizado siempre tiene solución se deduce que el conjunto de puntos no regulares (o singulares) de  $\partial\Omega$  tiene capacidad cero. Se dice que  $K$  (o, equivalentemente,  $\Omega$ ) es REGULAR CON RESPECTO AL PROBLEMA DE DIRICHLET si todos los puntos de  $\partial\Omega$  son regulares. Cuando utilicemos esta condición en lo sucesivo, diremos, por comodidad, que el conjunto  $K$  es regular.

Otro resultado de interés es que si  $P_n$  es un polinomio mónico de grado  $n$  se tiene  $\|P_n\|_K^{\frac{1}{n}} \geq \text{cap}(K)$ ,  $n \geq 1$ . Además (para la última afirmación del siguiente teorema consúltese el teorema 2.1 de [16])

**Teorema** Sea  $K \subset \mathbb{C}$  un compacto de interior vacío y con complemento conexo tal que  $\text{cap}(K) > 0$ . Si  $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de polinomios mónicos, gr  $P_n = n$ , que verifica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|_K^{\frac{1}{n}} \leq \text{cap}(K), \quad (3.7)$$

entonces

$$\Lambda_{P_n} \xrightarrow{*} \bar{\mu}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

donde  $\bar{\mu}$  es la medida de equilibrio de  $K$ . Si, además,  $K$  es un conjunto regular y los ceros de  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  están uniformemente acotados, entonces las dos fórmulas anteriores son equivalentes.

Dado un conjunto compacto  $K$  siempre existen familias de polinomios que verifican la condición (3.7). En concreto, se dice que el polinomio mónico de grado  $n$ ,  $T_n$ , es el  $n$ -ésimo POLINOMIO DE CHEBYCHEV de  $K$  si minimiza la norma uniforme en  $K$ , es decir, si verifica

$$\|T_n\|_K = \min\{\|q\|_K : q(z) = z^n + \dots\}.$$

Por un argumento de compacidad puede demostrarse que el  $n$ -ésimo polinomio de Chebychev existe y, si  $K$  consta de al menos  $n$  puntos, es único. Además, la sucesión  $\{T_n\}$  verifica (3.7). Un POLINOMIO DE FEKETE de  $K$  de grado  $n$ ,  $n \geq 2$ , es un polinomio de la forma

$$F_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j),$$

donde la  $n$ -upla  $(z_1, \dots, z_n)$  es un punto de máximo de las cantidades

$$\prod_{i,k:i < k} |\zeta_i - \zeta_k|^{\frac{2}{n(n-1)}}, \quad \zeta_1, \dots, \zeta_n \in K.$$

Los polinomios de Fekete no son necesariamente únicos y también cumplen (3.7). Tienen algunas ventajas sobre los polinomios de Chebychev: son más fácilmente computables y sus ceros pertenecen a  $K$ , mientras que los ceros de los polinomios de Chebychev están en  $\text{Co}(K)$ .

Para ver que, en general, las condiciones (3.7) y (3.8) no son equivalentes consideremos el conjunto  $[-2, 2] \cup \{3\}$  y los polinomios de Chebyshev  $T_n(z) = z^n + \dots$  para  $[-2, 2]$ . Sea  $\mu$  la medida definida en  $[-2, 2] \cup \{3\}$  cuya restricción a  $[-2, 2]$  es igual a la medida de Lebesgue en  $[-2, 2]$  y tiene masa 1 en  $z = 3$ . Los polinomios de Chebyshev  $T_n$  cumplen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{[-2,2]}^{1/n} \leq \text{cap}([-2, 2]) = 1. \quad (3.9)$$

Este hecho es equivalente (véase [3], teorema 1) a que

$$\Lambda_{T_n} \xrightarrow{*} \bar{\mu}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

donde  $\bar{\mu}$  es la medida de equilibrio de  $[-2, 2]$ , que es la misma medida que la medida de equilibrio de  $[-2, 2] \cup \{3\}$ , ya que ambos conjuntos se diferencian en un conjunto de

capacidad cero. A su vez, cualquiera de las condiciones (3.9) y (3.10) es equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(z)|^{1/n} = \exp(g_{\mathbb{C} \setminus [-2, 2]}(z; \infty)),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ . En particular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(3)|^{1/n} = \exp(g_{\mathbb{C} \setminus [-2, 2]}(3; \infty)) > 1. \quad (3.11)$$

Por otra parte, la condición (3.7), para los polinomios  $T_n$ , se escribe como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{[-2, 2] \cup \{3\}}^{1/n} \leq \text{cap}([-2, 2] \cup \{3\}) = 1,$$

lo cual contradice (3.11). Sin embargo, es fácil, en este caso, construir una familia de polinomios que satisfagan (3.7). Basta tomar  $P_n(z) = T_n(z)(z - 3)$ .

En el caso de medidas regulares, el comportamiento asintótico de la raíz  $n$ -ésima de polinomios ortogonales con respecto a medidas variantes está caracterizado por la medida de equilibrio en presencia del campo externo inducido por la parte variante de la medida. Por ello nos vemos en la necesidad de presentar los resultados anteriores con algo más de generalidad si bien todo es análogo.

Sea  $w$  una función continua positiva en  $K$ . Pongamos  $g(z) = -\log w(z)$ . Entre todas las medidas de probabilidad  $\sigma$  con soporte  $K$  existe una única medida de probabilidad  $\mu_w$  con soporte incluído en  $K$ , llamada la MEDIDA DE EQUILIBRIO O EXTREMAL ASOCIADA CON LA FUNCIÓN  $w$ , de modo que  $\mu_w$  minimiza la ENEGÍA PONDERADA

$$I_w(\sigma) = \int \int \left( \log \frac{1}{|z - t|} + g(z) + g(t) \right) d\sigma(z) d\sigma(t).$$

Sea  $S_w \subset K$  el soporte de esta medida extremal, existe una constante  $F_w$ , llamada CONSTANTE DE EQUILIBRIO O CONSTANTE DE ROBIN MODIFICADA, tal que

$$P(\mu_w; z) + g(z) \geq F_w, \quad \text{c.d. en } K, \quad (3.12)$$

$$P(\mu_w; z) + g(z) \leq F_w, \quad z \in S_w.$$

Debido a (3.12),  $\mu_w$  es también llamada MEDIDA DE EQUILIBRIO EN PRESENCIA DEL CAMPO EXTERNO  $g$ . La constante  $F_w$  está determinada por

$$F_w = I_w(\mu_w) - \int g(t) d\mu_w(t).$$



Análogamente al caso clásico se tiene que si  $P_n$  es un polinomio mónico de grado  $n$ , entonces  $\|w^n P_n\|_K^{\frac{1}{n}} \geq \exp(-F_w)$ ,  $n \geq 1$  y se verifica el siguiente teorema (para la última afirmación del teorema sobre la equivalencia de las dos condiciones véanse los lemas 3 y 4 en [22], allí se exige que los ceros de  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  estén en  $Co(K)$ , pero no hay inconveniente en sólo pedir que estén uniformemente acotados ya que así lo permite el principio del descenso)

**Teorema** Sea  $K \subset \mathbb{C}$  un conjunto compacto de interior vacío y con complemento conexo tal que  $\text{cap}(K) > 0$ . Si  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  es una sucesión de polinomios mónicos, gr  $P_n = n$ , que verifica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w^n P_n\|_K^{\frac{1}{n}} \leq \exp(-F_w), \quad (3.13)$$

entonces

$$\Lambda_{P_n} \xrightarrow{*} \mu_w, \quad n \rightarrow \infty.$$

Si, además,  $K$  es un conjunto regular y los ceros de  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  están uniformemente acotados, entonces las dos fórmulas anteriores son equivalentes.

En esta situación más general se pueden definir los polinomios de Chebychev y de Fekete asociados al peso  $w$  con propiedades análogas a los definidos anteriormente. El POLINOMIO DE CHEBYCHEV ASOCIADO A  $w$ ,  $T_n$ , cumple

$$\|w^n T_n\|_K = \min\{\|w^n q\|_K : q(z) = z^n + \dots\}$$

y la sucesión  $\{T_n\}$  satisface (3.13). Un POLINOMIO DE FEKETE ASOCIADO A  $w$  es un polinomio de la forma

$$F_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j),$$

donde la  $n$ -upla  $(z_1, \dots, z_n)$  es un punto de máximo de las cantidades

$$\prod_{i,k:i < k} (|\zeta_i - \zeta_k| w(\zeta_i) w(\zeta_k))^{\frac{2}{n(n-1)}}, \quad \zeta_1, \dots, \zeta_n \in K.$$

Cualquier sucesión de polinomios de Fekete asociados a  $w$  también satisface (3.13).

Sea ahora  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de polinomios mónicos definida en la sección anterior y supongamos que tiene distribución asintótica de ceros  $\nu$ , es fácil ver que

$(w_n)^{-1/gr w_n}$  converge uniformemente a  $e^{P(\nu; \cdot)}$  en  $S(\mu)$ . Si escogemos  $g(z) = -P(\nu; \cdot)$ , como el soporte de  $\nu$  está contenido en  $L \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus (I \cup \mathcal{P})$ , se tiene que  $\mu_w$  es el barrido de  $\nu$  en  $S(\mu)$  y  $S_w \equiv S(\mu)$  excepto en un conjunto de capacidad cero. Por tanto,

$$P(\mu_w; z) - P(\nu; z) = F_w, \quad \text{c.d. en } S(\mu). \quad (3.14)$$

Es conocido también que

$$G_\Omega(\nu; z) = F_w - P(\mu_w; z) + P(\nu; z), \quad z \in \Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu), \quad (3.15)$$

donde  $G_\Omega(\nu; \cdot)$  es el POTENCIAL DE GREEN de la medida  $\nu$  en  $\Omega$ ; es decir,

$$G_\Omega(\nu; z) = \int_L g_\Omega(z, \zeta) d\nu(\zeta), \quad z \in \Omega.$$

En el caso que  $S(\mu)$  sea regular las fórmulas 3.12 y 3.14 se cumplen sin excepción, ya que el conjunto de capacidad cero que aparece en ellas está formado por puntos singulares (respecto al problema de Dirichlet) de  $S(\mu)$ .

El siguiente lema, que será utilizado en el capítulo V, nos dice que los potenciales de Green se comportan adecuadamente respecto a una unión creciente de dominios.

**Lema 3.5** Sea  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos compactos contenidos en  $\mathbb{R}$  tal que  $K_{n+1} \subset K_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\text{cap}(\cap_{n=1}^\infty K_n) > 0$ . Sea  $\nu$  una medida positiva cuyo soporte está en  $\mathbb{C} \setminus K_1$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{D_n}(\nu; z) = G_D(\nu; z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $D$ , donde  $D_n = \mathbb{C} \setminus K_n$  y  $D = \cup_{n=1}^\infty D_n$ .

**DEMOSTRACIÓN** Como  $D_n \subset D_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sabemos que  $g_{D_n}(z; \zeta) \leq g_{D_{n+1}}(z; \zeta)$ ,  $z, \zeta \in D_n$ , por el principio de subordinación de las funciones de Green (véase [96], teorema 4.4.4). Además, las funciones de Green  $\{g_{D_n}(z; \zeta)\}$  son positivas y, en las condiciones del lema, se cumple la siguiente fórmula (véase [96], teorema 4.4.6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{D_n}(z; \zeta) = g_D(z; \zeta), \quad z, \zeta \in D.$$



Por tanto, podemos usar el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G_{D_n}(\nu; z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_{D_n}(z; \zeta) d\nu(\zeta) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_{D_n}(z; \zeta) d\nu(\zeta) \\ &= \int g_D(z; \zeta) d\nu(\zeta) = G_D(\nu; z), \quad z \in D. \end{aligned}$$

A causa de (3.15), dado un subconjunto compacto  $K$  de  $D$ , para todo  $n$  suficientemente grande,  $G_{D_n}(\nu; \cdot)$  es armónica en un entorno de  $K$ . Entonces,  $\{G_{D_n}(\nu; \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  constituye una sucesión creciente de funciones armónicas positivas que converge puntualmente a la función armónica  $G_D(\nu; \cdot)$  en un entorno de  $K$ . Así pues la convergencia es uniforme.

□

El siguiente teorema ha sido probado, con diferentes grados de generalidad, por diversos autores. Lo enunciamos aquí como aparece en el teorema 6.5.1 de [108], donde se puede encontrar la demostración junto con más referencias.

**Teorema** Sea  $S(\mu)$  un conjunto regular. Sea  $\mu \in \mathbf{Reg}$  y sea la sucesión de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida en § III.2. Supongamos que  $(w_n)^{-1/n}$  converge uniformemente a  $w^2$  en  $S(\mu)$ , donde  $w$  es una función continua positiva en  $S(\mu)$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\kappa_{n,n})^{1/n} = e^{F_w}, \quad (3.16)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_{n,n}(z)|^{1/n} = e^{F_w - P(\mu_w; z)} \quad (3.17)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ .

Finalmente, definimos un conjunto que juega un papel importante en la siguiente sección. Llamamos

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : G_\Omega(\nu; z) \leq \max_{\zeta \in \text{Co}(S(\mu))} G_\Omega(\nu; \zeta) \right\}.$$



### § III.4 Convergencia de los polinomios de Stieltjes

En lo sucesivo, supondremos que  $L \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $L$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C} \setminus E$ . La reducción a este caso se lleva a cabo por medio de una transformación de Möbius de la variable en el problema inicial que transforma  $S(\mu)$  en otro subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$  y  $L \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$  en un conjunto compacto contenido en  $\mathbb{C} \setminus \tilde{E}$ , donde  $\tilde{E}$  es la imagen de  $E$  por la transformación de Möbius. Esta suposición implica, en particular, que para todo  $n$  los grados de  $v_n$  y  $w_n$  son realmente  $n + 1$  y  $2n + 1$  respectivamente, y libera a nuestros razonamientos del tratamiento especial que, de otro modo, tendríamos que dar a los entornos del infinito. Utilizaremos esta suposición en las demostraciones pero enunciaremos los resultados para conjuntos  $L$  arbitrarios contenidos en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ .

**Teorema 3.15** *Supongamos que las sucesiones de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tienen la medida  $\nu$  como su distribución asintótica de ceros. Sea  $k$  un número entero fijo,  $k \geq 0$ . Si  $S(\mu)$  es regular y  $\mu \in \text{Reg}$  entonces*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|s_{n,n+k+1} g_{n,n+k} - 1\|_K^{1/n} \leq \|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_K \|\exp\{G_\Omega(\nu; z)\}\|_{\text{Co}(S(\mu))}, \quad (3.18)$$

siendo  $K$  cualquier subconjunto compacto de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Fijemos un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{C} \setminus E$ . Sea  $V$  un entorno abierto de  $L$  tal que  $\overline{V} \subset \mathbb{C} \setminus E$ . Tómese  $n_0$  suficientemente grande tal que para todo  $n \geq n_0$  los ceros de  $v_n$  estén en  $V$ . Fijemos  $r > \|G_\Omega(\nu; \zeta)\|_{\text{Co}(S(\mu))}$  de modo que  $\overline{V} \cup K$  esté contenido en la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma_r$ , donde  $\gamma_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : G_\Omega(\nu; \zeta) = r\}$ . Aplicando (3.6), donde ahora la curva es  $\gamma_r$ , tenemos que

$$\|s_{n,n+k+1} g_{n,n+k} - 1\|_K \leq C \frac{\|v_n g_{n,n+k}\|_K}{\inf_{\zeta \in \gamma_r} |v_n(\zeta) g_{n,n+k}(\zeta)|},$$

donde  $C$  es una constante positiva que depende de la longitud de  $\gamma_r$  y de la distancia de  $\gamma_r$  a  $K$ , pero no de  $n \geq n_0$ . Por tanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|s_{n,n+k+1} g_{n,n+k} - 1\|_K^{1/n} \leq \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n g_{n,n+k}\|_K^{1/n}}{\liminf_{n \rightarrow \infty, \zeta \in \gamma_r} |v_n(\zeta) g_{n,n+k}(\zeta)|^{1/n}}. \quad (3.19)$$

De las desigualdades (3.4) y de (3.17), se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_{n,n+k}(z)|^{1/n} = e^{P(\mu_w; z) - F_w} \quad (3.20)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . Como  $\nu$  es la distribución asintótica de ceros de  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n(z)|^{1/n} = e^{-P(\nu; z)}, \quad (3.21)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \mathbf{L}$  y usando el principio del descenso llegamos a que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |v_n(z)|^{1/n} \leq e^{-P(\nu; z)}, \quad (3.22)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . De (3.20), (3.21) y (3.22), teniendo en cuenta (3.15), se deduce que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n g_{n,n+k}\|_K^{1/n} \leq \|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_K \quad (3.23)$$

y

$$\liminf_{n \rightarrow \infty, \zeta \in \gamma_r} |v_n(\zeta) g_{n,n+k}(\zeta)|^{1/n} = \exp -r. \quad (3.24)$$

Las relaciones (3.23) y (3.24) junto con (3.19) dan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|s_{n,n+k+1} g_{n,n+k} - 1\|_K^{1/n} \leq \exp r \|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_K.$$

El primer miembro de esta desigualdad no depende de  $r$ ; por tanto, podemos hacer que  $r$  tienda a  $\|G_\Omega(\nu; \zeta)\|_{\text{Co}(S(\mu))}$  obteniendo (3.18) para subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus E$ . La función dentro del signo de la norma en el primer miembro de (3.18) es analítica en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$  y, en particular, en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ ; por tanto, usando el principio del

máximo, se extiende fácilmente el resultado a subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ . Con esto se concluye la demostración. □

**Corolario 3.2** *Bajo las hipótesis del teorema 3.15, se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,n+k+1}(z) g_{n,n+k}(z) = 1, \quad (3.25)$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ . El conjunto de puntos de acumulación de los ceros de  $\{S_{n,n+k+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  está contenido en  $E$ . Además*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_{n,n+k+1}|^{1/n}(z) = e^{F_w - P(\mu_w; z)}, \quad (3.26)$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus E$ .*

DEMOSTRACIÓN. Como  $\|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_K \|\exp\{G_\Omega(\nu; z)\}\|_{\text{Co}(S(\mu))} < 1$  debido a que la función  $-G_\Omega(\nu; z)$  es subarmónica en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ , la relación (3.25) se deduce inmediatamente de (3.18). La afirmación relativa a los ceros de  $\{S_{n,n+k+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es consecuencia directa de (3.25) y del teorema de Hurwitz ya que la función 1 no tiene ceros en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ . Finalmente, (3.25) y (3.20) implican (3.26). □

En el caso que  $w_n \equiv v_n \equiv 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_n \equiv \mu$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para probar la parte 1 del teorema 3.14, podemos seguir los mismos razonamientos que al probar el teorema 3.15 reemplazando las fórmulas (3.16) y (3.17) por (1.7) y (1.8) las cuales se cumplen incluso si  $S(\mu)$  no es regular. En este caso espacial, las relaciones (3.25) y (3.26) son también válidas (sin la hipótesis de que  $S(\mu)$  sea regular) sustituyendo en (3.26)  $F_w - P(\mu_w; z)$  por  $g_\Omega(z, \infty)$ .

Digamos ahora algunas palabras acerca del caso cuando  $S(\mu)$  es un intervalo. Sabemos, gracias a (3.14), que  $G_\Omega(\nu; z) \equiv 0$  en  $S(\mu)$ . Por tanto, en este caso particular,  $E \equiv S(\mu)$ . Como  $\exp -G_\Omega(\nu; z) < 1$  en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$ , el teorema 3.15 y el

corolario 3.2 son ciertos en todo  $\overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$ . Más aún, se puede probar el siguiente teorema acerca del comportamiento asintótico de los ceros de los polinomios de Stieltjes.

**Teorema 3.16** *Sea  $S(\mu)$  un intervalo. Supongamos que las sucesiones de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  and  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tienen  $\nu$  como su distribución asintótica de ceros y que  $\mu \in \text{Reg}$ . Entonces*

$$\Lambda_{S_{n,n+k+1}} \xrightarrow{*} \mu_w, \quad n \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos  $\Lambda_{S_{n,n+k+1}} \equiv \Lambda_n$  y denotemos el potencial de  $\Lambda_n$  por  $U_n$ . Todas las medidas  $\Lambda_n$  son medidas de probabilidad. Sea  $\Delta \subset \mathbb{N}$  una subsucesión de índices tal que

$$\Lambda_n \xrightarrow{*} \Lambda, \quad n \in \Delta, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Es suficiente demostrar que  $\Lambda \equiv \mu_w$  para cualquier sucesión  $\Delta$  de índices que verifique (3.27). El corolario 3.2 indica que el soporte de  $\Lambda$  está contenido en el conjunto  $S(\mu)$ . Además, sabemos, gracias al lema 3.3, que  $\text{gr } S_{n,n+k+1} = n + k + 1$ .

Teniendo en cuenta (3.26) y (3.16), llegamos a que

$$\lim_{n \in \Delta} U_n(z) = \lim_{n \in \Delta} \frac{-1}{n + k + 1} \log |S_{n,n+k+1}| = P(\mu_w, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus S(\mu).$$

Por otra parte, de (3.27) se deduce

$$\lim_{n \in \Delta} U_n(z) = U_\Lambda(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus S(\mu),$$

donde  $U_\Lambda$  es el potencial de la medida  $\Lambda$ . De este modo,  $U_\Lambda(z) = P(\mu_w, z)$  salvo en un conjunto de medida de Lebesgue cero en el plano complejo; por tanto, del teorema 3.7.4 en [96], obtenemos que  $\Lambda \equiv \mu_w$  como queríamos demostrar.  $\square$

Para medidas cuyo soporte no es un intervalo, usando básicamente los mismos argumentos, se puede probar que el barrido en  $\partial E$  de cualquier subsucesión convergente de  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el barrido en  $\partial E$  de la correspondiente medida de equilibrio  $\mu_w$ .

Veamos ahora otro tipo de relaciones asintóticas. En lo que resta de sección, a menos que se indique lo contrario, consideraremos, para no complicar la notación, que el soporte de la medida  $\mu$  es el intervalo  $[-1, 1]$ , pero todos los resultados pueden ser enunciados para cualquier intervalo compacto  $I$  de  $\mathbb{R}$ . La reducción al intervalo  $[-1, 1]$  se lleva a cabo, como es habitual, por medio de un cambio afín de la variable.

Es bien sabido que si  $\mu' > 0$  en casi todo punto de  $[-1, 1]$  y  $L \cap [-1, 1] = \emptyset$ , entonces para cada número natural fijo  $k \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,n+k+1}(z)}{p_{n,n+k}(z)} = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad (3.28)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Más aún, para todo  $m \in \mathbb{N}$  y toda función  $f$  medible Borel, acotada en  $[-1, 1]$ , se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) p_{n,n+k}(x) p_{n,n+k+m}(x) d\mu_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

donde  $T_m$  denota the  $m$ -ésimo polinomio de Chebyshev, es decir,  $T_m(\cos \theta) = \cos m\theta$ . En particular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{n,n+k}(z) p_{n,n+k}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad (3.29)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ , donde la raíz cuadrada se escoge de modo que  $\sqrt{z^2-1} > 0$  si  $z > 1$ . La demostración de estos resultados puede verse en [63]. Con hipótesis más generales han sido probados en la sección § II.5.

Con ayuda de los teoremas anteriores acerca de la convergencia de la raíz  $n$ -ésima de los polinomios de Stieltjes, podemos ahora deducir relaciones asintóticas del cociente de estos mismos polinomios.

**Teorema 3.17** *Supongamos que las sucesiones de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tengan la misma distribución asintótica de ceros. Sea  $k$  un número entero fijo,  $k \geq 0$ . Si  $S(\mu) = [-1, 1]$  y  $\mu' > 0$  en casi todo punto de  $[-1, 1]$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n,n+k+1}(z)}{s_{n,n+k}(z)} = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (3.30)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,n+k}(z)}{s_{n,n+k+1}(z)} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (3.31)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

**DEMOSTRACIÓN.** En primer lugar, obsérvese que  $\mu' > 0$  en casi todo punto de  $[-1, 1]$  implica que  $\mu \in \mathbf{Reg}$  (véase [108], teorema 4.1.1). Utilizando (3.25), (3.29) y (3.28), se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n,n+k+1}(z)}{s_{n,n+k}(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n,n+k+1}(z) g_{n,n+k}(z)}{s_{n,n+k}(z) g_{n,n+k-1}(z)} \times \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,n+k-1}(z) g_{n,n+k-1}(z)}{p_{n,n+k}(z) g_{n,n+k}(z)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,n+k}(z)}{p_{n,n+k-1}(z)} = z + \sqrt{z^2 - 1}, \end{aligned}$$

y todos los límites son uniformes en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Esto demuestra (3.30). De (3.29) y (3.25), se obtiene inmediatamente (3.31).  $\square$

Si  $w_n \equiv v_n \equiv 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la parte 2 del teorema 3.14 se prueba de modo parecido. Primero, obsérvese que si la medida está en la clase  $M(1, 0)$  de Nevai-Blumenthal y permanece fija para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces se cumple (3.29) y (3.28) tiene lugar uniformemente en subconjuntos compactos de  $S(\mu) \setminus [-1, 1]$ . Por otra parte, todo punto de  $S(\mu) \setminus [-1, 1]$  es un punto límite de los ceros de los polinomios ortogonales (cf. el teorema 6.1.1 en [113]). Por tanto, podemos escoger

(véase la observación hecha al final de la siguiente sección) curvas de integración tan cercanas como queramos al intervalo  $[-1, 1]$  ya que se puede asegurar que entre dos puntos de masa consecutivos de  $\mu$  en el exterior de dicha curva (sólo puede haber un número finito de tales puntos de masa) las funciones de segunda clase no tendrán ceros para  $n$  suficientemente grande. El resto de los razonamientos que se necesitan no se diferencian de los dados en la demostración del teorema 3.17.

Como antes,  $\Psi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ . Esta función es la aplicación conforme de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$  en  $\{|w| > 1\}$  tal que  $\Psi(\infty) = \infty$  y  $\Psi'(\infty) > 0$ . Sea  $k$  un número entero fijo. Del teorema 2.11 (nótese que los ceros de  $w_n$  están uniformemente alejados de  $\text{Co}(S(\mu))$ ) se deduce que si  $\mu \in \mathbf{S}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,n+k}^2(z)}{[\Psi(z)]^{2k-1} w_n(z)} B_n(z) = \frac{1}{2\pi} [S(\mu'(\cos \theta) |\sin(\theta)|; \Psi(z))]^2, \quad (3.32)$$

uniformemente en conjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , donde

$$B_n(z) = \prod_{i=1}^{2n+1} \frac{\Psi(z) - \Psi(w_{n,i})}{1 - \overline{\Psi(w_{n,i})} \Psi(z)}. \quad (3.33)$$

Si  $x_{n,i} = \infty$  el correspondiente factor en  $B_n$  se sustituye por  $1/\Psi(z)$ . Por tanto, como caso particular, cuando  $w_n \equiv 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  se obtiene la conocida fórmula (1.11).

Utilizando estas relaciones y los resultados anteriores se obtiene un teorema sobre convergencia fuerte de los polinomios de Stieltjes.

**Teorema 3.18** *Supongamos que las sucesiones de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tienen la misma distribución asintótica de ceros. Sea  $k$  un número entero fijo,  $k \geq 0$ . Si  $\mu \in \mathbf{S}$  entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n,n+k+1}^2(z)}{[\Psi(z)]^{2k-1} w_n(z)} B_n(z) = \frac{z^2 - 1}{2\pi} [S(\mu'(\cos \theta) |\sin(\theta)|; \Psi(z))]^2, \quad (3.34)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , donde  $B_n(z)$  viene dado por (3.33).



DEMOSTRACIÓN. De (3.25), (3.32) y (3.29), se deduce que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n,n+k+1}^2(z)}{[\Psi(z)]^{2k-1} w_n(z)} B_n(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,n+k+1}^2(z) g_{n,n+k}^2(z) \times \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,n+k}^2(z)}{[\Psi(z)]^{2k-1} w_n(z)} B_n(z) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{g_{n,n+k}^2(z) p_{n,n+k}^2(z)} \\ &= \frac{z^2 - 1}{2\pi} [S(\mu'(\cos \theta) |\sin(\theta)|; \Psi(z))]^2, \end{aligned}$$

donde la convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , lo cual prueba (3.34). □

### § III.5 Un ejemplo

El siguiente ejemplo ilustra las dificultades que se encuentran al intentar mejorar los resultados de la sección anterior cuando  $S(\mu)$  no es un intervalo. De hecho, muestra que, en general, en la clase de las medidas regulares no se puede obtener convergencia en un conjunto mayor que  $\mathbb{C} \setminus E$ , o conseguir estimaciones de la razón de convergencia mejores que la que aparecen en el segundo miembro de (3.18).

Para mayor simplicidad, escojamos  $w_n = v_n \equiv 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Gracias a la fórmula 3.3, tenemos que

$$(p_n g_n)'(z) = - \int \frac{p_n^2(x)}{(z-x)^2} d\mu(x) < 0, \quad z \in \mathbb{R} \setminus S(\mu). \quad (3.35)$$

Por tanto,  $p_n g_n$  es estrictamente decreciente en los intervalos abiertos que constituyen las componentes conexas de  $\mathbb{R} \setminus S(\mu)$ . En particular, en cada uno de esos intervalos la función  $p_n g_n$  tiene como mucho un cero simple.

Consideremos  $d\mu(x) = \chi(x) dx$ , donde  $\chi(x) = 1/2$  si  $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$  y es igual a cero en el resto. Esta medida es simétrica respecto al origen. Por tanto,  $p_{2n+1}$  es una función impar y debe tener un cero en  $z = 0$ ; de esta manera, de acuerdo con lo que dijimos anteriormente,  $g_{2n+1}$  no tiene ningún cero en  $(-1, 1)$ .



Por otro lado,  $p_{2n}$  es par y así  $p_{2n}/x$  es impar, de lo cual se deduce que  $g_{2n}(0) = -\int p_{2n}(x)/x d\mu(x) = 0$ .

Como todos los “ceros” de  $w_{2n+1}$  están en infinito,  $\nu$  es la medida de Dirac con carga 1 en infinito y  $G_\Omega(\nu; z) = g_\Omega(z, \infty)$ . Sea  $r > 0$  y pongamos  $\gamma_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : g_\Omega(z, \infty) = r\}$ . Como  $g_{2n+1}^{-1}$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus S(\mu)$ , podemos probar (3.6) con  $\gamma = \gamma_r$  (véase la demostración del lema 3.4). Con ayuda de esta fórmula para  $\gamma_r$  es fácil obtener, siguiendo la misma demostración que en el teorema 3.15, que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|s_{2n+2} g_{2n+1} - 1\|_K^{1/2n} \leq \|\exp\{-g_\Omega(z, \infty)\}\|_K,$$

para cada subconjunto compacto  $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$ .

Por simetría, se tiene que  $g_\Omega(0, \infty) = \max_{\zeta \in [-2, 2]} g_\Omega(\zeta, \infty)$ . Tómese  $a \in \mathbb{C} \setminus S(\mu)$ , con  $g_\Omega(a, \infty) < g_\Omega(0, \infty)$ . Sea  $0 < r < g_\Omega(a, \infty)$  y  $\gamma$  una circunferencia positivamente orientada centrada en  $z = 0$  tal que  $a$  y  $\gamma_r$  pertenezcan a la componente conexa no acotada de  $\gamma$ . Como  $g_{2n}^{-1}$  tiene un polo simple en  $z = 0$ , siguiendo los mismos argumentos utilizados al probar (3.6) y usando el teorema de los residuos se obtiene

$$\begin{aligned} s_{2n+1}(a) g_{2n}(a) &= 1 + \frac{g_{2n}(a)}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{g_{2n}(\zeta)(\zeta - a)} + \frac{g_{2n}(a)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{g_{2n}(\zeta)(\zeta - a)} \\ &= 1 + \frac{g_{2n}(a)}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{g_{2n}(\zeta)(\zeta - a)} + \frac{-g_{2n}(a)}{a g'_{2n}(0)}. \end{aligned}$$

En cuanto a la integral del último miembro de la fórmula anterior es fácil deducir que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{2n}(a)}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{g_{2n}(\zeta)(\zeta - a)} \right|^{1/n} \leq \exp\{r - g_\Omega(a, \infty)\} < 1.$$

Por lo que respecta al tercer sumando (véase (3.35) y téngase en cuenta que  $g_{2n}(0) = 0$ ), tenemos

$$\frac{-g_{2n}(a)}{a g'_{2n}(0)} = \frac{g_{2n}(a) p_{2n}(0)}{a \int p_{2n}^2(x) x^{-2} d\mu(x)}.$$

Como

$$\frac{1}{4} \leq \left| \int \frac{p_{2n}^2(x)}{x^2} d\mu(x) \right| \leq 1$$

y  $\lim_{n \rightarrow \infty} |p_{2n}(z)|^{1/2n} = \exp\{g_{\Omega}(z, \infty)\}$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus S(\mu)$  (debido a que  $p_{2n}$  no tiene ceros en  $(-1, 1)$ ) se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{2n}(a)}{a g'_{2n}(0)} \right|^{1/2n} = \exp\{g_{\Omega}(0, \infty) - g_{\Omega}(a, \infty)\} > 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_{2n+1}(a) g_{2n}(a) - 1|^{1/2n} = \exp\{g_{\Omega}(0, \infty) - g_{\Omega}(a, \infty)\}.$$

Luego en el punto  $a$ , la función  $s_{2n+1}(a) g_{2n}(a)$  no converge a 1. Es más, diverge geométricamente.

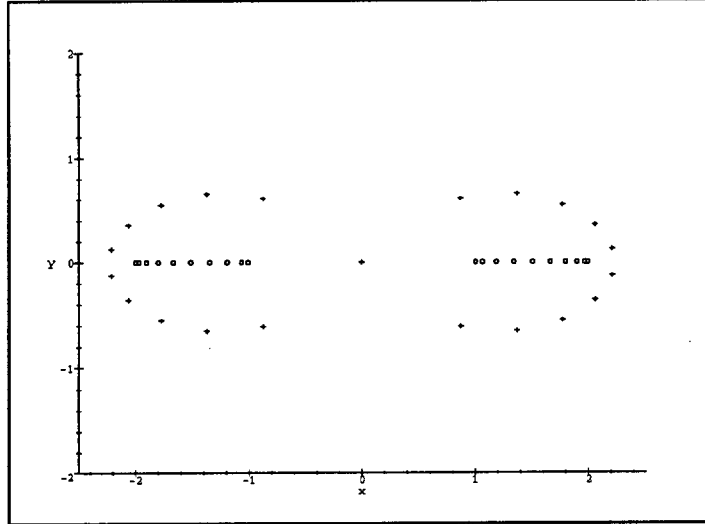


Figura III.1: Ceros de  $S_{20}$  y  $S_{21}$ .

Los ceros de los polinomios de Stieltjes para esta medida tienen un comportamiento interesante; mientras que los de  $S_{2n}$  están en  $[-2, -1] \cup [1, 2]$ , los de  $S_{2n+1}$  dibujan la curva de nivel  $\{\zeta \in \mathbb{C} : g_{\Omega}(\zeta, \infty) = g_{\Omega}(0, \infty)\}$ . La figura III.1 muestra los ceros de  $S_n$  for  $n = 20, 21$  (las circunferencias pequeñas son los ceros de  $S_{20}$  y las cruces los ceros de  $S_{21}$ ).

Como muestra este ejemplo, el único inconveniente para extender los resultados de la sección anterior a subconjuntos compactos más cercanos a  $S(\mu)$  es la existencia

de ceros de  $g_n$  en  $\text{Co}(S(\mu)) \setminus S(\mu)$ . Si, por alguna razón, sabemos que las funciones de segunda clase (o alguna subsucesión suya) no tiene ceros en  $\text{Co}(S(\mu)) \setminus S(\mu)$ , entonces podemos extender (3.18) a subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$  (para la correspondiente subsucesión).





# Capítulo IV

## Aproximantes de Padé simultáneos

### § IV.1 Introducción

Sea  $m$  un número entero positivo y  $\{f_1, \dots, f_m\}$  un conjunto de funciones

$$f_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_{k,i}}{z^{i+1}}, \quad k = 1, \dots, m;$$

cada una de ellas analítica en un entorno de  $z = \infty$ . Sea  $n$  un multiíndice, es decir,  $n = (n_1, \dots, n_m)$  con  $n_k \in \mathbb{N}$ ,  $k = 1, \dots, m$ . En estas condiciones es fácil ver que existen polinomios  $Q_n, P_{n,1}, \dots, P_{n,m}$  que verifican

- $\text{gr } Q_n \leq |n| = n_1 + \dots + n_m$ ;  $Q_n \not\equiv 0$ .
- $(Q_n f_k - P_{n,k})(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_k+1}}\right)$ ,  $z \rightarrow \infty$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Las funciones racionales

$$R_{n,k} = \frac{P_{n,k}}{Q_n}, \quad k = 1, \dots, m,$$

son los APROXIMANTES HERMITE-PADÉ (o aproximantes de Padé simultáneos) del sistema  $(f_1, \dots, f_m)$  con respecto al multiíndice  $n$ . Se dice que el multiíndice  $n$  es NORMAL para el sistema de funciones  $\{f_1, \dots, f_m\}$  si  $\text{gr } Q_n = |n|$ . Esta propiedad garantiza la unicidad de los aproximantes. Si todos los multiíndices  $n \in \mathbb{N}^m$  son normales para  $(f_1, \dots, f_m)$ , se dice que el sistema de funciones  $(f_1, \dots, f_m)$  es PERFECTO. Los aproximantes de Padé simultáneos surgieron en las investigaciones de

Hermite [53], relacionadas con la trascendencia del número  $e$ , lo cual fue demostrado por Hermite utilizando el hecho de que el sistema de funciones  $e^{a_1 z}, \dots, e^{a_m z}$  es perfecto (suponiendo que  $a_i \neq a_j$  cuando  $i \neq j$ ). Desde entonces, uno de los principales campos de aplicación de los aproximantes Hermite-Padé ha sido la teoría de los números (véase, por ejemplo, [101]). Para más detalles a este respecto pueden consultarse los trabajos [117] y [118] donde se hace una introducción a este tema y se encuentran referencias adicionales.

Obsérvese que si  $m = 1$  los aproximantes Hermite-Padé coinciden con los clásicos aproximantes de Padé. Sin embargo, a pesar de esta analogía, la situación Hermite-Padé en general es más compleja. Para dar una idea de ello digamos que ni siquiera la unicidad de los aproximantes está asegurada, por lo que la investigación se ha centrado en aquellos sistemas para los que puede probarse la normalidad del multiíndice  $n$ . Entre otros, destacamos dos de ellos: los sistemas de Angelesco y de Nikishin. Ambos están formados por funciones de Markov, es decir funciones del tipo

$$f(z) = \hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z - x},$$

donde  $\mu$  es una medida de Borel finita y positiva cuyo soporte  $S(\mu)$  es un subconjunto compacto de la recta real  $\mathbb{R}$ . Un SISTEMA DE ANGELESCO (véase [1]) es un conjunto de funciones de Markov  $\{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_m\}$  donde los soportes de las medidas están contenidos en intervalos disjuntos. En este caso el denominador común  $Q_n$  de los aproximantes satisface las relaciones de ortogonalidad

$$\int x^\nu Q_n(x) d\mu_k(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, \dots, m.$$

De donde se sigue que el sistema es perfecto. A diferencia del caso Padé no se tiene en general convergencia de los aproximantes Hermite-Padé a las funciones de Markov. El primer resultado positivo fue obtenido por V. A. Kalyagin en [54] para un caso particular. En [5] se prueban resultados de convergencia fuerte imponiendo condiciones tipo Szegő. El resultado más completo aparece en [49] donde se obtiene el comportamiento asintótico de la raíz  $n$ -ésima de los denominadores  $Q_n$  y se prueba la existencia en general de regiones en las cuales los aproximantes divergen.

Otro sistema relevante es el introducido por E. M. Nikishin en [80]. Dada su mayor complejidad nos limitamos en esta introducción al caso  $m = 2$  y remitimos

al lector a la siguiente sección para una definición más completa. Consideramos dos medidas de Borel finitas y positivas  $\mu$  y  $\sigma$  tales que  $Co(S(\mu)) \cap Co(S(\sigma)) = \emptyset$ . Pongamos

$$f_1(z) = \int \frac{d\sigma(t)}{z-t}, \quad f_2(z) = \int \frac{\hat{\mu}(t) d\sigma(t)}{z-t}.$$

El conjunto  $\{f_1, f_2\}$  forma un SISTEMA DE NIKISHIN. A diferencia de los sistemas de Angelesco las dos funciones están ahora definidas sobre el mismo conjunto. Nikishin probó convergencia de los aproximantes en el mayor dominio posible para el caso diagonal ( $n_1 = n_2$ ) y  $m = 2$ ; en [19] se generalizó el resultado para  $m$  arbitrario. Posteriores trabajos ([28]-[30], [18], entre otros) extendieron los resultados sobre convergencia y/o normalidad. Todos estos esfuerzos cristalizaron en [51] donde se encontró el formalismo adecuado para tratar de modo eficaz sistemas generales mixtos Angelesco-Nikishin. En este último trabajo, usando resultados sobre potenciales vectoriales de [47], [48] y [50], se encuentra el comportamiento asintótico de la raíz  $n$ -ésima del denominador  $Q_n$  bajo la condición  $\mu'_k > 0$  en casi todo punto.

Volviendo al caso  $m = 2$ , puede probarse sin dificultad que el denominador común  $Q_n$  comparte relaciones de ortogonalidad con las dos medidas  $d\sigma(t)$  y  $\hat{\mu}(t) d\sigma(t)$ . Con más precisión, se cumple

$$0 = \int t^\nu Q_n(t) d\sigma(t), \quad \nu = 0, \dots, n_1 - 1$$

y

$$0 = \int t^\nu Q_n(t) \hat{\mu}(t) d\sigma(t), \quad \nu = 0, \dots, n_2 - 1.$$

Supongamos que  $n_2 \leq n_1 + 1$ . Un hecho no trivial es que  $Q_n$  también satisface relaciones de ortogonalidad completa con respecto a una medida variante. Existe un polinomio  $w_n$ , gr  $w_n = n_2$ , cuyos ceros están en  $Co(S(\mu))$  tal que

$$0 = \int t^\nu Q_n(t) \frac{d\sigma(t)}{w_n(t)}, \quad \nu = 0, \dots, n - 1.$$

Es también sabido que los polinomios  $w_n$  verifican relaciones de ortogonalidad completa con respecto a una medida variante bastante complicada, concretamente

$$0 = \int x^\nu \frac{w_n(x)}{Q_n(x)} \int \frac{Q_n^2(t) d\sigma(t)}{t-x w_n(t)} d\mu(x), \quad \nu = 0, \dots, n_2 - 1$$

(para más detalles, véase [19] y [51]). El objetivo de este capítulo es el estudio del comportamiento asintótico de las sucesiones  $\{Q_n\}$  y  $\{w_n\}$  además de las medidas variantes respecto de las cuales estos polinomios son ortogonales. Las hipótesis principales serán  $n_1 = n_2 \rightarrow \infty$  y  $\mu', \sigma' > 0$  en casi todo punto de los soportes respectivos. El resultado principal es una fórmula del tipo (1.10) que completa el cuadro de las relaciones asintóticas asociadas con los sistemas de Nikishin, la cual ha sido utilizada para probar convergencia fuerte de los denominadores  $Q_n$  (véase [7]).

Para terminar esta sección introductoria mencionemos algunos trabajos generales o recopilatorios donde se puede encontrar más información sobre los aproximantes Hermite-Padé: [6], [8], [81] y [84], entre otros.

## § IV.2 Sistemas de Nikishin

En esta sección y la siguiente adoptamos la notación introducida en [51] y hacemos uso de las nuevas relaciones de ortogonalidad que los autores de ese trabajo han descubierto. Sin embargo, restringimos nuestra atención a los sistemas de Nikishin porque nuestros métodos no cubren el caso general que allí se trata.

Sean  $F_1$  y  $F_2$  dos segmentos disjuntos de la recta real; sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  dos medidas de Borel finitas y positivas tales que  $S(\sigma_1) \subset F_1$ ,  $S(\sigma_2) \subset F_2$ . En esta situación puede definirse una nueva medida  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  como

$$d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) = d\sigma_1(x) \int \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} = \hat{\sigma}_2(x) d\sigma_1(x)$$

La medida  $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  tiene, obviamente, signo constante en el intervalo  $F_1$ .

Dada ahora una familia finita de segmentos  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , tales que  $F_k \cap F_{k+1} = \emptyset$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-1$ ; y un conjunto de medidas de Borel finitas y positivas  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ ,  $S(\sigma_k) \subset F_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , puede definirse, de manera inductiva, las siguientes medidas

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1} \rangle = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1} \rangle \rangle, \quad k = 2, \dots, m-1.$$



De esta forma, en el intervalo  $F_1$  se han definido  $m$  medidas de Borel finitas y positivas, cada una de las cuales tiene signo constante. Denotemos

$$s_1 = \langle \sigma_1 \rangle = \sigma_1, \quad s_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \quad \dots, \quad s_m = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle.$$

La familia de funciones  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ , donde

$$f_k(z) = \hat{s}_k(z) = \int \frac{ds_k(x)}{z-x}, \quad k = 1, \dots, m$$

define lo que se llama un SISTEMA DE NIKISHIN.

Consideremos un multiíndice  $n = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ . Entonces, existe un polinomio  $Q_n$  que satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} Q_n &\neq 0, \quad \deg Q_n \leq |n| = n_1 + \dots + n_m \\ (Q_n f_k - P_{n,k})(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n_k+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $P_{n,k}$  es un polinomio. Las funciones racionales

$$R_{n,k} = \frac{P_{n,k}}{Q_n}, \quad k = 1, \dots, m,$$

son los APROXIMANTES HERMITE-PADÉ (o aproximantes de Padé simultáneos) del sistema  $(f_1, \dots, f_m)$  con respecto al multiíndice  $n$ , que es la misma definición que se dio en la sección § IV.1 para un sistema de funciones arbitrario.

De (4.1) se deduce

$$0 = \int x^\nu Q_n(x) ds_k(x), \quad \nu = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.2)$$

Las así llamadas FUNCIONES DE SEGUNDO ORDEN se definen como

$$\Phi_{n,k}(z) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x} ds_k(x), \quad k = 1, \dots, m.$$

De (4.2) se deduce que

$$\Phi_{n,k}(z) = \frac{1}{q(z)} \int \frac{Q_n(x)q(x)}{z-x} ds_k(x), \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

donde  $q$  es un polinomio arbitrario de grado menor o igual que  $n_k$ . Por tanto,

$$\Phi_{n,k}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_k+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$



Usando (4.4) (véase (4.1)) y la identidad

$$Q_n(z) \int \frac{ds_k(x)}{z-x} - \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x} ds_k(x) = \int \frac{Q_n(x)}{z-x} ds_k(x) ,$$

se obtienen fórmulas para los numeradores de los aproximantes Hermite-Padé

$$P_{n,k}(z) = \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z-x} ds_k(x) , \quad k = 1, \dots, m , \quad (4.5)$$

y para el resto

$$f_k(z) - R_{n,k}(z) = \frac{1}{(Q_n q)(z)} \int \frac{(Q_n q)(x)}{z-x} ds_k(x) , \quad k = 1, \dots, m . \quad (4.6)$$

En lo sucesivo supondremos que el multiíndice  $n = (n_1, \dots, n_m)$  verifica la siguiente condición:

$$j \leq k \Rightarrow n_k \leq n_j + 1 . \quad (4.7)$$

Dado un multiíndice  $n$  (que satisfaga (4.7)), se definen de manera inductiva las funciones

$$\Psi_{n,0}(z) = Q_n(z) , \quad \Psi_{n,k}(z) = \int \frac{\Psi_{n,k-1}(x)}{z-x} d\sigma_k(x) , \quad k = 1, \dots, m . \quad (4.8)$$

Para cada  $j = 0, \dots, m-1$  y  $k = j+1, \dots, m$ , se define la medida

$$s_k^j = \langle \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_k \rangle .$$

En estas condiciones se obtiene

**Lema** Para cada  $j = 0, \dots, m-1$ , las funciones  $\Psi_{n,j}$  verifican

$$0 = \int x^\nu \Psi_{n,j} ds_k^j(x) , \quad \nu = 0, \dots, n_k - 1 , \quad k = j+1, \dots, m . \quad (4.9)$$

Para  $j = 0$ , (4.9) coincide con (4.2). La demostración se lleva a cabo por inducción, probando que si el enunciado es cierto para  $j \in \{0, \dots, m-2\}$  entonces también se cumple para  $j+1$  (para más detalles, véase la proposición 1 en [51]).

Tomando  $k = j + 1$  y  $s_{j+1}^j = \sigma_{j+1}$ , el resultado (4.9) implica que

$$0 = \int x^\nu \Psi_{n,j}(x) d\sigma_{j+1}(x), \quad \nu = 0, \dots, n_{j+1} - 1, \quad j = 0, \dots, m - 1. \quad (4.10)$$

De (4.10) se deduce que  $\Psi_{n,j}(z)$  tiene al menos  $n_{j+1}$  cambios de signo en  $F_{j+1}$ . Denotemos por  $Q_{n,k}$  al polinomio mónico cuyos ceros son los ceros de  $\Psi_{n,k-1}$  en  $F_k$  (contando la multiplicidad). De acuerdo con (4.10),  $\text{gr } Q_{n,k} \geq n_k$ . Denotemos  $Q_{n,m+1} \equiv 1$  y

$$N_{n,k} = \sum_{j=k}^m n_j, \quad k = 1, \dots, m.$$

**Lema** Para  $k = 1, \dots, m$

$$0 = \int x^\nu \Psi_{n,k-1}(x) \frac{d\sigma_k(x)}{Q_{n,k+1}(x)}, \quad \nu = 0, \dots, N_{n,k} - 1. \quad (4.11)$$

Para  $k = m$ , (4.11) se reduce a (4.10) con  $j = m - 1$ . Para el resto de los valores indicados de  $k$ , la fórmula se prueba por inducción en los valores decrecientes del índice  $k$  (para más detalles, véase la proposición 2 en [51]).

Usando (4.11), se tiene que  $\text{gr } Q_{n,k} \geq N_{n,k}$ . Utilizando (4.8), (4.11) y la fórmula integral de Cauchy, se deduce fácilmente que si para algún  $k$ ,  $\text{gr } Q_{n,k} > N_{n,k}$ , entonces  $\text{gr } Q_{n,k-1} > N_{n,k-1}$ . Como  $\Psi_{n,0} = Q_n$  y  $\text{gr } Q_n \leq |n| = N_{n,1}$ , se tiene (para más detalles, véase la proposición 3 en [51]) que

**Lema** Para cada  $k = 1, \dots, m$ , el polinomio  $Q_{n,k}$  tiene exactamente  $N_{n,k}$  ceros simples en el intervalo  $F_k$  y  $\text{gr } Q_{n,k} = N_{n,k}$ . En particular,  $Q_{n,1} = Q_n$ .

Pongamos  $Q_{n,0} \equiv 1$ . Para cada  $k = 1, \dots, m$ , la fórmula (4.11) puede reescribirse del siguiente modo

$$0 = \int x^\nu Q_{n,k}(x) \left| \frac{Q_{n,k-1}(x) \Psi_{n,k-1}(x)}{Q_{n,k}(x)} \right| \frac{d\sigma_k(x)}{|Q_{n,k-1}(x) Q_{n,k+1}(x)|}, \quad \nu = 0, \dots, N_{n,k} - 1. \quad (4.12)$$

Por otra parte, para  $k = 1, \dots, m$ ,  $\frac{\Psi_{n,k}}{Q_{n,k+1}}$  es holomorfa en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_k$ , y (recuérdese que  $Q_{n,m+1} \equiv 1$ )

$$\frac{\Psi_{n,k}(z)}{Q_{n,k+1}(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{N_k+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Esto último se deduce de (4.10) para  $j = k - 1$ , de las fórmulas (4.8) y del hecho que  $\text{gr } Q_{n,k+1} = N_{k+1}$  ( $N_{m+1} = 0$ ). En particular,

$$\frac{Q_{n,k}(z)\Psi_{n,k}(z)}{Q_{n,k+1}(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Sea  $\Gamma$  una curva de Jordan analítica que rodee el intervalo  $F_k$  tal que  $F_{k+1}$  y  $z$  estén en la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Para  $k = m$ ,  $\Gamma$  rodea  $F_k$  y  $z$  está en el exterior de esta curva. De la fórmula integral de Cauchy y de (4.8) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{Q_{n,k}(z)\Psi_{n,k}(z)}{Q_{n,k+1}(z)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q_{n,k}(\zeta)\Psi_{n,k}(\zeta)}{Q_{n,k+1}(\zeta)} \frac{d\zeta}{z - \zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q_{n,k}(\zeta)d\zeta}{Q_{n,k+1}(\zeta)(z - \zeta)} \int \frac{\Psi_{n,k-1}(t)}{\zeta - t} d\sigma_k(t) \\ &= \int \frac{\Psi_{n,k-1}(t)d\sigma_k(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q_{n,k}(\zeta)}{Q_{n,k+1}(\zeta)(z - \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - t} \\ &= \int \frac{Q_{n,k}(t)\Psi_{n,k-1}(t)}{Q_{n,k+1}(t)} \frac{d\sigma_k(t)}{z - t}. \end{aligned}$$

Se puede reescribir la igualdad anterior de una forma más simétrica

$$\begin{aligned} \frac{Q_{n,k}(z)\Psi_{n,k}(z)}{Q_{n,k+1}(z)} &= \\ &= \int \frac{Q_{n,k}^2(t)}{z - t} \frac{Q_{n,k-1}(t)\Psi_{n,k-1}(t)}{Q_{n,k}(t)} \frac{d\sigma_k(t)}{Q_{n,k-1}(t)Q_{n,k+1}(t)}, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para cada  $k = 1, \dots, m$ , pongamos

$$K_{n,k} = \left( \int Q_{n,k}^2(x) \left| \frac{Q_{n,k-1}(x)\Psi_{n,k-1}(x)}{Q_{n,k}(x)} \right| \frac{d\sigma_k(x)}{|Q_{n,k-1}(x)Q_{n,k+1}(x)|} \right)^{-1/2}.$$

Tómese

$$K_{n,0} = 1, \quad \kappa_{n,k} = \frac{K_{n,k}}{K_{n,k-1}}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Definimos

$$q_{n,k} = \kappa_{n,k} Q_{n,k}, \quad F_{n,k}(z) = K_{n,k-1}^2 \left| \frac{Q_{n,k-1}(z) \Psi_{n,k-1}(z)}{Q_{n,k}(z)} \right|, \quad k = 1, \dots, m.$$

Con esta notación, el polinomio  $q_{n,k}$  es ortonormal con respecto a la medida variante

$$\frac{F_{n,k}(x) d\sigma_k(x)}{|Q_{n,k-1}(x) Q_{n,k+1}(x)|}. \quad (4.14)$$

Este hecho nos permite aplicar a los polinomios  $q_{n,k}$  los teoremas obtenidos en el capítulo II, lo cual será aprovechado en la sección siguiente para obtener resultados acerca del comportamiento asintótico de dichos polinomios.

### § IV.3 Propiedades asintóticas

Del enunciado de nuestro siguiente resultado se ve fácilmente que la principal herramienta en su demostración es el teorema 2.9. A causa del cambio de notación en este capítulo, para evitar confusiones, es conveniente poner de manifiesto lo que los índices en el teorema 2.9 significan en relación con su uso en el presente contexto. En el teorema 2.9,  $n \in \mathbb{N}$  no es un multiíndice, sino que controla la relación entre los polinomios ortonormales, la medida respecto de la cual satisfacen relaciones de ortogonalidad y, junto con  $k$ , la conexión entre el grado de  $l_{n,n+k}$  y  $w_{2n}$  (al aplicar el teorema 2.9 escogemos  $m = 0$ , lo cual nada tiene que ver con las  $m$  funciones del sistema de Nikishin).

La primera observación importante es que en el teorema 2.9 no hay necesidad de que el índice  $n$  recorra la sucesión completa de los números naturales. Si las condiciones de admisibilidad fuerte se cumplen para  $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$  entonces el enunciado sigue siendo válido tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  con  $n \in \Lambda$ . Además obsérvese que  $\text{gr } w_{2n} \leq 2n$ . Con lo que el grado de los polinomios ortogonales puede acercarse

a infinito mucho más rápidamente que  $\text{gr } w_{2n}$ . Más aún, se puede escoger  $w_{2n} \equiv 1$ , para todo  $n$ , por lo que el grado de  $w_{2n}$  puede no tender a infinito. Por otra parte,

$$\text{gr } w_{2n} - 2 \text{gr } l_{n,n+k} \leq 2n - 2(n+k) \leq 2|k| ,$$

donde  $k$  es un número entero fijado de antemano, así que cuando  $n$  tiende a infinito la diferencia entre los grados permanece acotada superiormente. Esta restricción es esencial en el método utilizado para llegar a probar el teorema 2.9. Al demostrar el teorema 2.1, que es la base de todos los resultados posteriores, se pasa al primer miembro de (2.7) toda la parte de  $W_n$  que permita la fórmula (2.6). Después, al final de la demostración, es posible manejar dicha parte de  $W_n$  gracias a que el grado de  $A_n$  permanece acotado cuando  $n$  tiende a infinito.

Finalmente, es fácil ver que el teorema 2.9 sigue siendo válido si para cada  $n \in \Lambda$ , el signo de  $w_{2n}$  en el intervalo de ortogonalidad  $F = [a, b]$  es constante (positivo o negativo dependiendo de  $n$ ). Los únicos cambios que hay que hacer en las expresiones (2.43) y (2.44) es que en el primer miembro se debe colocar  $|w_{2n}(x)|$  en lugar de  $w_{2n}(x)$ , y en el segundo miembro se sustituye  $\sqrt{1-x^2}$  por  $\sqrt{(b-x)(x-a)}$ .

Hechas estas aclaraciones, enunciamos el siguiente

**Teorema 4.19** *Sea  $\Lambda$  una sucesión de multiíndices tal que se cumpla (4.7),  $n_{k-1} - n_k \leq C, k = 2, \dots, m$ , donde  $C$  es una constante independiente de  $n \in \Lambda$ , y  $n_1 \rightarrow \infty$  cuando  $n$  pertenece a  $\Lambda$ . Supongamos que para cada  $k = 1, \dots, m, \sigma'_k > 0$  en casi todo punto de  $F_k$ . Entonces, para cada  $k = 1, \dots, m$ , y toda función acotada medible Borel  $f$  definida en  $F_k = [a_k, b_k]$ , se cumple*

$$\lim_{n \in \Lambda} \int f(x) \frac{q_{n,k}^2(x)}{|Q_{n,k-1}(x)Q_{n,k+1}(x)|} F_{n,k}(x) \sigma'_k(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{a_k}^{b_k} f(x) \frac{dx}{\sqrt{(b_k - x)(x - a_k)}} \quad (4.15)$$

y

$$\lim_{n \in \Lambda} \int f(x) \frac{q_{n,k}^2(x)}{|Q_{n,k-1}(x)Q_{n,k+1}(x)|} F_{n,k}(x) d\sigma_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{a_k}^{b_k} f(x) \frac{dx}{\sqrt{(b_k - x)(x - a_k)}} \quad (4.16)$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba se llevará a cabo por inducción sobre el índice  $k$  (según su significado en el teorema 4.19) y usando el teorema 2.9. Para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$  el papel de  $\mu_n$  es representado por  $F_{n,k}d\sigma_k$ , el de  $w_{2n}$  lo toma  $Q_{n,k-1}Q_{n,k+1}$  y  $l_{n,n+k}$  es  $q_{n,k}$ . Los multiíndices  $n$  pertenecen a la sucesión  $\Lambda$ .

Teniendo en cuenta que los ceros de  $Q_{n,k-1}Q_{n,k}$  permanecen uniformemente acotados lejos de  $F_k$  (están dentro de  $F_{k-1} \cup F_{k+1}$  que no interseca a  $F_k$ ) es fácil comprobar que se verifican todas las condiciones de admisibilidad fuerte desde (III) a (V). Más aún,  $(N_{m+1} = 0)$ , para  $k = 2, \dots, m$

$$\text{gr } Q_{n,k-1}Q_{n,k+1} - 2 \text{gr } Q_{n,k} = N_{n,k-1} + N_{n,k+1} - 2N_{n,k} = n_{k-1} - n_k \leq C ,$$

mientras que

$$\text{gr } Q_{n,0}Q_{n,2} - 2 \text{gr } Q_{n,1} = N_{n,2} - 2N_{n,1} = -n_1 - N_{n,1} \leq 0 .$$

De modo que la diferencia entre los grados del denominador y del numerador de la función racional  $\frac{q_{n,k}^2}{Q_{n,k-1}Q_{n,k+1}}$  en (4.15)-(4.16) permanece uniformemente acotada como era necesario.

Las condiciones (I)-(II) las comprobaremos paso a paso dentro del proceso de inducción. Para  $k = 1$ ,  $F_{n,1}(x) \equiv 1$  y las condiciones (I)-(II) se cumplen de modo inmediato tomando como límite la medida  $\sigma_1$ , ya que  $F_{n,1}(x)d\sigma_1(x) = d\sigma_1(x)$  permanece fija. Como  $q_{n,1}$  es ortonormal con respecto a  $d\sigma_1(x)/|Q_{n,0}(x)Q_{n,2}(x)|$  (recuérdese que  $Q_{n,0} \equiv 1$ ) entonces (4.15) y (4.16) se deducen directamente de (2.43) y (2.44) respectivamente (teniendo en cuenta las observaciones hechas antes del enunciado de este teorema). Supongamos que (4.15) y (4.16) se cumplen para algún  $k - 1$ , donde  $k \in \{2, \dots, m\}$ , probemos, entonces, que también se cumplen para  $k$ .

Para ello, es suficiente probar que se verifican las condiciones (I)-(II) de la definición de la admisibilidad fuerte. Es decir, hay que probar que existe una medida de Borel  $\sigma$  en  $F_k$  finita y positiva tal que  $F_{n,k}(x)d\sigma_k(x) \xrightarrow{*} d\sigma(x)$  cuando  $n$  recorre la sucesión de multiíndices  $\Lambda$  y

$$\lim_{n \in \Lambda} \int |F_{n,k}(x)\sigma'_k(x) - \sigma'(x)|dx .$$

Tal medida es fácil de encontrar si probamos que la sucesión de funciones  $\{F_{n,k}\}$  converge uniformemente en  $F_k$  a una función continua estrictamente positiva cuando  $n$  varía en  $\Lambda$ .

Sustituímos en (4.13)  $k$  por  $k-1$ , multiplicamos ambos lados por  $K_{n,k-1}^2$  y tomamos módulo. Se obtiene (obsérvese que  $K_{n,k-1} = \kappa_{n,k-1} K_{n,k-2}$ )

$$F_{n,k}(z) = \left| \int \frac{1}{z-t} \frac{q_{n,k-1}^2(t)}{|Q_{n,k-2}(t)Q_{n,k}(t)|} F_{n,k-1}(t) d\sigma_{k-1}(t) \right|. \quad (4.17)$$

Usando (4.16) para  $k-1$  y tomando  $f(t) = (z-t)^{-1}$ , se obtiene para cada  $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F_{k-1}$  el límite puntual

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \Lambda} \int \frac{1}{z-t} \frac{q_{n,k-1}^2(t)}{|Q_{n,k-2}(t)Q_{n,k}(t)|} F_{n,k-1}(t) d\sigma_{k-1}(t) \\ = \frac{1}{\pi} \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \frac{1}{z-t} \frac{dt}{\sqrt{(b_{k-1}-t)(t-a_{k-1})}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Las integrales del primer miembro de la fórmula (4.18) definen una sucesión de funciones analíticas en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_{k-1}$  que está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto  $K$  perteneciente a  $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_{k-1}$  por  $\frac{1}{d(K, F_{k-1})}$ , donde  $d(K, F_{k-1})$  denota la distancia entre los conjuntos compactos disjuntos  $K$  y  $F_{k-1}$ . Por tanto, el límite de (4.18) es uniforme en  $K$ . En particular, es uniforme en  $F_k$ . Es bien conocido y fácil de comprobar, usando la fórmula integral de Cauchy, que

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \frac{1}{z-t} \frac{dt}{\sqrt{(b_{k-1}-t)(t-a_{k-1})}} = \frac{1}{\sqrt{(z-b_{k-1})(z-a_{k-1})}}, \quad (4.19)$$

donde la raíz cuadrada se toma de modo que  $\sqrt{(z-b_{k-1})(z-a_{k-1})} > 0$  para  $z = x > b_{k-1}$ .

De (4.17), (4.18) y (4.19) se deduce que

$$\lim_{n \in \Lambda} F_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{|(x-b_{k-1})(x-a_{k-1})|}},$$

uniformemente en  $F_k$ , que es lo que queríamos probar. Las condiciones (I)-(II) se deducen tomando  $d\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{|(x-b_{k-1})(x-a_{k-1})|}} d\sigma_k(x)$ . Con lo cual la demostración del teorema 4.19 está completa.  $\square$



Como todos los ceros del polinomio  $Q_{n,k}$  pertenecen al intervalo  $F_k$  y  $F_{k-1} \cap F_k = \emptyset = F_k \cap F_{k+1}$ , para cada  $n \in \Lambda$  y  $k \in \{1, \dots, m\}$ , podemos deducir que la función  $\frac{Q_{n,k-1}\Psi_{n,k-1}}{Q_{n,k-1}Q_{n,k}Q_{n,k+1}}$  tiene signo constante en  $F_k$ . Si el signo es positivo, de (4.13) deducimos

$$\begin{aligned} \frac{Q_{n,k}(z)\Psi_{n,k}(z)}{Q_{n,k+1}(z)} &= \int \frac{Q_{n,k}^2(t)}{z-t} \frac{Q_{n,k-1}(t)\Psi_{n,k-1}(t)}{Q_{n,k}(t)} \frac{d\sigma_k(t)}{Q_{n,k-1}(t)Q_{n,k+1}(t)} \\ &= \int \frac{Q_{n,k}^2(t)}{z-t} \left| \frac{Q_{n,k-1}(t)\Psi_{n,k-1}(t)}{Q_{n,k}(t)} \right| \frac{d\sigma_k(t)}{|Q_{n,k-1}(t)Q_{n,k+1}(t)|}. \end{aligned}$$

Si el signo es negativo,

$$\begin{aligned} -\frac{Q_{n,k}(z)\Psi_{n,k}(z)}{Q_{n,k+1}(z)} &= \int \frac{Q_{n,k}^2(t) - Q_{n,k-1}(t)\Psi_{n,k-1}(t)}{z-t} \frac{d\sigma_k(t)}{Q_{n,k-1}(t)Q_{n,k+1}(t)} \\ &= \int \frac{Q_{n,k}^2(t)}{z-t} \left| \frac{Q_{n,k-1}(t)\Psi_{n,k-1}(t)}{Q_{n,k}(t)} \right| \frac{d\sigma_k(t)}{|Q_{n,k-1}(t)Q_{n,k+1}(t)|}. \end{aligned}$$

Normalizamos ahora la función  $\Psi_{n,k}$  según la regla siguiente. En el primer caso, signo positivo, tomamos  $\psi_{n,k} = K_{n,k}^2 \Psi_{n,k}$  y en el segundo  $\psi_{n,k} = -K_{n,k}^2 \Psi_{n,k}$ . En los dos casos, multiplicando ambos lados de las dos fórmulas anteriores por  $K_{n,k}^2$ , obtenemos

$$\frac{Q_{n,k}(z)\psi_{n,k}(z)}{Q_{n,k+1}(z)} = \int \frac{q_{n,k}^2(t)}{z-t} F_{n,k}(t) \frac{d\sigma_k(t)}{|Q_{n,k-1}(t)Q_{n,k+1}(t)|} \quad (4.20)$$

**Corolario 4.3** *Supongamos que se verifican las hipótesis del teorema 4.19, entonces para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$  se cumple*

$$\lim_{n \in \Lambda} Q_{n,k}(z) \prod_{j=k}^m \psi_{n,j}(z) = \prod_{j=k}^m \frac{1}{\sqrt{(z-b_j)(z-a_j)}} \quad (4.21)$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{j=k}^m F_j)$  y para todo  $k$  la raíz cuadrada se escoge de modo que  $\sqrt{(z-b_k)(z-a_k)} > 0$  para  $z = x > b_k$ .

**DEMOSTRACIÓN.** De (4.20) se deduce

$$Q_{n,k}(z) \prod_{j=k}^m \psi_{n,j}(z) = \prod_{j=k}^m \frac{Q_{n,j}(z)\psi_{n,j}(z)}{Q_{n,j+1}(z)} = \prod_{j=k}^m \int \frac{q_{n,j}^2(t)}{z-t} F_{n,j}(t) \frac{d\sigma_j(t)}{|Q_{n,j-1}(t)Q_{n,j+1}(t)|}.$$

Utilizando el teorema 4.19, para  $f(t) = (z - t)^{-1}$ , se obtiene convergencia puntual para todo  $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{j=k}^m F_j)$ . En la demostración del teorema 4.19, se demostró que para cada  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  fijo, este límite es uniforme en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_j$ . Los mismos argumentos son válidos para  $j = m$  (no hubo necesidad de considerar este caso en la demostración del teorema). Por tanto, (4.21) se obtiene de manera inmediata, lo que concluye la demostración.  $\square$

Para finalizar este capítulo, utilizaremos los resultados de la sección § II.6 para demostrar una fórmula de convergencia fuerte de los polinomios  $Q_{n,k}$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Para ello, hacemos las mismas consideraciones que se hicieron antes de enunciar el teorema 4.19 además de añadir alguna notación. En vez de tomar módulo sobre  $Q_{n,k-1}Q_{n,k+1}$ , definimos los números  $\lambda_{n,k}$  como  $+1$  si el polinomio  $Q_{n,k-1}Q_{n,k+1}$  es positivo en  $F_k = [a_k, b_k]$  y  $-1$  si es negativo. Denotamos

$$f_1 \equiv 1, \quad f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{|(x - b_{k-1})(x - a_{k-1})|}}, \quad k = 2, \dots, m.$$

Para  $k = 1, \dots, m$ , llamamos  $\Psi_k$  a la aplicación conforme de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_k$  en  $\{|z| > 1\}$  tal que  $\Psi_k(\infty) = \infty$  y  $\Psi'_k(\infty) > 0$ . Por último,  $M_{n,k}$  denota  $\text{gr}(Q_{n,k-1}Q_{n,k+1})$  y

$$Q_{n,k-1}(x)Q_{n,k+1}(x) = \prod_{i=1}^{M_{n,k}} (x - x_{n,k,i}).$$

Con estas definiciones se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 4.20** *Sea  $\Lambda$  una sucesión de multiíndices tal que se verifica la condición (4.7),  $n_{k-1} - n_k \leq C$ ,  $k = 2, \dots, m$ , donde  $C$  es una constante independiente de  $n \in \Lambda$ , y  $n_1 \rightarrow \infty$  cuando  $n$  recorre  $\Lambda$ . Supongamos que para todo  $k = 1, \dots, m$  se cumple*

$$\frac{\log \sigma'_k(x)}{\sqrt{(b_k - x)(x - a_k)}} \in L^1(F_k).$$

Entonces, para todo  $k = 1, \dots, m$

$$\lim_{n \in \Lambda} \frac{Q_{n,k}(x)Q_{n,m}(x)}{Q_{n,k-1}(x)} \frac{K_{n,m}^2}{K_{n,k-1}^2} \prod_{j=k}^m A_{n,j}(x) = \prod_{j=k}^m \frac{1}{2\pi} [S(f_j \sigma'_j, \Psi_j(x))]^2,$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus (\cup_{j=k}^m F_j)$  y

$$A_{n,k}(x) = \lambda_{n,k} \Psi_k(x)^{n_{k-1}-n_k} \prod_{i=1}^{M_{n,k}} \frac{\Psi_k(x) - \Psi_k(x_{n,k,i})}{1 - \Psi_k(x_{n,k,i})\Psi_k(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya se vio en la prueba del resultado anterior que las medidas variantes (4.14) satisfacen las condiciones de admisibilidad fuerte debido a que las funciones  $F_{n,k}$  convergen uniformemente a  $f_k$  en el conjunto  $F_k$ . Por otra parte,

$$\frac{\log(f_k(x)\sigma'_k(x))}{\sqrt{(b_k-x)(x-a_k)}} \in L^1(F_k)$$

ya que  $f_k$  es una función continua estrictamente positiva en el intervalo  $F_k$ . De aquí y de la convergencia uniforme de  $F_{n,k}$  a  $f_k$ , se tiene que todas las funciones  $F_{n,k}$  están acotadas inferiormente por una constante positiva independiente de  $n \in \Lambda$ . Por tanto,

$$\frac{\log(F_{n,k}(x)\sigma'_k(x))}{\sqrt{(b_k-x)(x-a_k)}} \in L^1(F_k)$$

y  $\log(F_{n,k})$  tiende a  $\log(f_k)$  uniformemente en  $F_k$  para  $n \in \Lambda$ . Entonces, la condición

$$\liminf_{n \in \Lambda} \int_{F_k} \frac{\log(F_{n,k}(x)\sigma'_k(x))}{\sqrt{(b_k-x)(x-a_k)}} dx \geq \int_{F_k} \frac{\log(f_k(x)\sigma'_k(x))}{\sqrt{(b_k-x)(x-a_k)}} dx$$

también se cumple.

Obsérvese que

$$\text{gr}(Q_{n,k}^2) - \text{gr} Q_{n,k-1} \text{gr} Q_{n,k+1} =$$

$$2N_{n,k} - N_{n,k-1} - N_{n,k+1} = n_k - n_{k-1}, n_0 = 0.$$

Los números  $n_k - n_{k-1}$  dependen de  $n$  pero permanecen acotados, así que no juegan ningún papel a la hora de calcular el límite. Por tanto, usando (2.54) para  $j = 1, \dots, m$ , se tiene

$$\lim_{n \in \Lambda} \frac{Q_{n,j}^2(x)}{Q_{n,j-1}(x)Q_{n,j+1}(x)} \frac{K_{n,j}^2}{K_{n,j-1}^2} \lambda_{n,j} \Psi_j(x)^{n_{j-1}-n_j} B_{n,j}(x) = \frac{1}{2\pi} [S(f_j \sigma'_j, \Psi_j(x))]^2, \quad (4.22)$$



donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus F_j$  y

$$B_{n,j}(x) = \prod_{i=1}^{M_{n,j}} \frac{\Psi_j(x) - \Psi_j(x_{n,j,i})}{1 - \overline{\Psi_j(x_{n,j,i})} \Psi_j(x)}.$$

Si ahora multiplicamos entre sí las expresiones (4.22) para  $j = k, \dots, m$ , obtenemos el resultado enunciado.

□

# Capítulo V

## Aproximantes multipuntuales de Padé con polos fijos

### § V.1 Introducción

En los últimos veinte años han surgido varias generalizaciones y modificaciones de los aproximantes de Padé conforme lo demandaba el planteamiento y resolución de nuevos problemas en la teoría de la aproximación racional. Hablaremos en este capítulo de dos de estas construcciones recientes.

Consideramos una función arbitraria  $f$  del tipo (1.2) analítica en un dominio  $D$  que contenga al infinito y una familia de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\text{gr } w_n \leq 2n$ . En estas condiciones existen polinomios  $p_n, q_n$  de grado a lo más  $n$ ,  $q_n \neq 0$ , que verifican las condiciones

- $\frac{q_n f - p_n}{w_n} \in \mathcal{H}(D)$ , donde  $\mathcal{H}(D)$  denota el conjunto de todas las funciones holomorfas definidas en  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ .
- $\frac{q_n f - p_n}{w_n}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$

La función racional  $R_n = p_n/q_n$  es el  $n$ -ésimo APROXIMANTE MULTIPUNTUAL DE PADÉ de  $f$  que interpola a dicha función en los ceros del polinomio  $w_n$ . A veces se les ha llamado también aproximantes generalizados de Padé. Obsérvese que si  $w_n \equiv 1$  la definición coincide con la de aproximante de Padé. En general es posible que los

ceros de  $w_n$  no correspondan realmente a puntos de interpolación debido a que  $q_n$  se anule también en estos puntos, pero bajo hipótesis adecuadas puede asegurarse el carácter interpolatorio de las funciones  $R_n$  y su unicidad. En la mayor parte de los casos los aproximantes multipuntuales se comportan de modo parecido a los aproximantes de Padé. Puede decirse que los primeros trabajos que utilizan estas funciones racionales en problemas de aproximación son [46] y [58] (si bien ya hay alguna referencia en [43]) donde se demuestran resultados análogos a los clásicos teoremas de Markov y Stieltjes, respectivamente. Además, entre otros trabajos, podemos citar [60], relacionado con el teorema que se demuestra en la sección § V.6 y [104] donde  $f$  es una función analítica cuya región de singularidad tiene capacidad cero. Una característica interesante de estos aproximantes es que pueden aparecer en situaciones no propiamente multipuntuales en su formulación inicial, es decir, en dependencia del problema que se plantee aparecen condiciones de interpolación de carácter multipuntual a posteriori, no pedidas de antemano, como en los sistemas de Nikishin [19] o en aproximación de funciones del tipo Stieltjes [62].

Hay determinados problemas en la teoría de aproximación racional en los que se dispone de alguna información sobre la región de singularidad de la función que se quiere aproximar. Por ejemplo, consideremos el caso de la función de Markov

$$\widehat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z - x}.$$

Como el conjunto de puntos singulares de la función de Markov está contenido en el soporte de la medida  $\mu$ , podemos aprovecharnos de este hecho fijando todos o parte de los polos del aproximante precisamente en el conjunto  $S(\mu)$ . A esta construcción se le viene llamando recientemente aproximación tipo Padé. En concreto, sea  $f$  como en el caso anterior y fijemos una familia de polinomios  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\text{gr } t_n = k(n) \leq n$ . Entonces existen polinomios  $p_n, q_n$ , que verifican las condiciones

- $\text{gr } q_n \leq n - k(n)$ ,  $\text{gr } p_n \leq n$ ,  $q_n \neq 0$ .
- $(q_n t_n f - p_n)(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n-k(n)+1}}\right)$ ,  $z \rightarrow \infty$ .

La función racional  $R_n = p_n/(q_n t_n)$  es el  $n$ -ésimo APROXIMANTE TIPO PADÉ de  $f$  con polos prefijados en los ceros del polinomio  $t_n$ . Como  $t_n$  está dado de antemano,

un número  $k(n)$  de polos de  $R_n$  han sido prefijados en los ceros de  $t_n$  mientras que  $n - k(n)$  polos quedan determinados por las condiciones de interpolación. En general, la construcción de estos aproximantes tiene menor coste computacional que los aproximantes de Padé pues el número de incógnitas a resolver para hallar el denominador es menor. A cambio, si se quiere conseguir el mismo orden de aproximación que en el caso Padé, necesita mayor número de datos, es decir, el conocimiento de mayor número de términos en el desarrollo en serie de potencias de la función  $f$ .

Estos aproximantes fueron estudiados en los trabajos de A. A. Gonchar [42] y [43]. En el primero de ellos se prueba una generalización del teorema de Montessus de Ballore cuando  $f$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ; para ello se fijan de manera adecuada todos los polos en el intervalo  $[-1, 1]$  salvo un número constante. En [43] la función  $f$  es meromorfa (posiblemente con infinitos polos) en un dominio regular y se prueba convergencia en capacidad de los aproximantes tipo Padé siempre que los polos libres sean  $o(n)$ . En los últimos diez años se ha incrementado el número de trabajos sobre los aproximantes tipo Padé, sobre todo para el caso de las funciones de Markov. Entre otros autores que han contribuido a su estudio podemos citar a L. Karlberg, H. Wallin, A. Ambroladze, F. Cala y G. López (véanse las referencias [55], [2]-[4] y [20]-[22]). Para más datos sobre esta clase de aproximantes puede consultarse la monografía [17].

Finalmente, ambos tipos de aproximación (multipuntual y tipo Padé) se pueden combinar para dar lugar a los aproximantes multipuntuales tipo Padé (véase la definición más adelante). Referencias para este tipo de aproximación pueden ser los trabajos [21] y [22]. Queremos destacar que en todas estas nuevas construcciones los denominadores de los aproximantes están relacionados con polinomios ortogonales con respecto a medidas variantes cuya estructura es distinta dependiendo de la clase de aproximación elegida, como quedará claro en la próxima sección. A este respecto, señalemos la principal característica novedosa del resultado que aparece en la sección § V.2. Hasta ahora, en la aproximación tipo Padé de funciones de Markov los polos fijos se han elegido con multiplicidad par a fin de asegurar que la medida variante resultante fuese positiva. Se plantea la pregunta de si esta restricción, impuesta por



los métodos utilizados, es o no esencial. Aprovechando los resultados de convergencia de los polinomios de Stieltjes podemos aclarar en parte esta cuestión: resulta que si el soporte de la medida  $\mu$  es un conjunto convexo y los polos se fijan en los ceros de los polinomios ortogonales con respecto a  $\mu$ , entonces no hay diferencia alguna; en el caso que  $S(\mu)$  no es convexo sí es importante que la medida variante sea positiva para garantizar en general la convergencia de los aproximantes en el mayor dominio posible.

En la sección § V.3 utilizamos este resultado para probar la convergencia de la fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod para funciones analíticas en un entorno del conjunto de integración. En la última parte del capítulo, resolvemos un problema de aproximación de funciones de Markov meromorfas utilizando aproximantes multipuntuales tipo Padé. Esta situación es especialmente interesante ya que el carácter de la función impide que se fijen todos los polos del aproximante. A lo largo de todo el capítulo,  $\mu$  denotará una medida positiva finita de Borel con soporte,  $S(\mu)$ , compacto y contenido en la recta real  $\mathbb{R}$ .

## § V.2 Aproximación de funciones de Markov

Consideremos la función de Markov

$$\widehat{\mu}(z) = c + \int \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sean las sucesiones de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definidas en la sección § III.2. Es fácil comprobar que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una única función racional  $R_n = L_n/(Q_n p_{n,n})$ , donde  $L_n$  y  $Q_n$  verifican:

- $\text{gr } Q_n \leq n + 1, \text{gr } L_n \leq 2n + 1$  y  $Q_n \not\equiv 0$ .

- $\frac{Q_n p_{n,n} \widehat{\mu} - L_n}{w_n v_n} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus S(\mu)).$

- $\frac{Q_n p_{n,n} \widehat{\mu} - L_n}{w_n v_n}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$



La función racional  $R_n$  se llama el  $n$ -ésimo APROXIMANTE MULTIPUNTUAL TIPO PADÉ de la función  $f$ . Se puede probar (véase, por ejemplo, el lema 1 de [21]) que

$$0 = \int x^k Q_n(x) p_{n,n}(x) \frac{d\mu(x)}{w_n(x) v_n(x)}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

de donde se deduce que  $Q_n \equiv S_{n,n+1}$ , el polinomio de Stieltjes variante de grado  $n + 1$ . También se cumple

$$\hat{\mu}(z) - R_n(z) = \frac{w_n(z) v_n(z)}{(s_{n,n+1} p_{n,n} h)(z)} \int \frac{(s_{n,n+1} p_{n,n} h)(x)}{w_n(x) v_n(x)} \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu), \quad (5.1)$$

donde  $h$  es cualquier polinomio de grado menor o igual que  $n + 1$ .

Remitimos al lector a la sección § III.3 para los conceptos y notaciones utilizados y recordamos aquí que el conjunto  $E$  se define como

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : G_\Omega(\nu; z) \leq \max_{\zeta \in \text{Co}(S(\mu))} G_\Omega(\nu; \zeta) \right\}.$$

Podemos probar ahora

**Teorema 5.21** *Supongamos que las sucesiones de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tienen  $\nu$  como su distribución asintótica de ceros. Sea  $S(\mu)$  regular y  $\mu \in \text{Reg}$ . Entonces, para cada subconjunto compacto  $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ , se cumple*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\mu}(z) - R_n(z)\|_K^{1/3n} \leq \|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_K \|\exp\{G_\Omega(\nu; z)\}\|_{\text{Co}(S(\mu))}. \quad (5.2)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Fijemos un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{C} \setminus E$ . Sea  $V$  un entorno de  $L$  tal que  $\overline{V} \subset \mathbb{C} \setminus E$ . Tómesese  $n_0$  suficientemente grande para que si  $n \geq n_0$  todos los ceros de  $v_n$  pertenezcan a  $V$ . Fijemos  $r > \|G_\Omega(\nu; \zeta)\|_{\text{Co}(S(\mu))}$  tal que  $\overline{V} \cup K$  esté en la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma_r$ , donde  $\gamma_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : G_\Omega(\nu; \zeta) = r\}$ . Para mayor comodidad, denotemos  $w_n(z) v_n(z) / (s_{n,n+1}^2(z) p_{n,n}(z))$  por  $h_n(z)$ . Escogiendo  $h \equiv s_{n,n+1}$  en (5.1), tenemos que

$$\hat{\mu}(z) - R_n(z) = h_n(z) \int \frac{1}{h_n(x)} \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad z \in K.$$

Como  $1/((z-x)h_n(x))$  es analítica en un entorno abierto de la componente conexa acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma_r$ , podemos usar la fórmula integral de Cauchy y el teorema de Fubini para obtener

$$\widehat{\mu}(z) - R_n(z) = h_n(z) \int_{\gamma_r} \frac{1}{h_n(\zeta)} \frac{\widehat{\mu}(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta, \quad z \in K.$$

Así

$$\|\widehat{\mu}(z) - R_n(z)\|_K \leq C \frac{\|h_n\|_K}{\inf_{\zeta \in \gamma_r} |h_n(\zeta)|},$$

donde  $C$  es una constante positiva que depende de la longitud de  $\gamma_r$  y de la distancia entre  $\gamma_r$  y  $K$ , pero no de  $n \geq n_0$ . Por tanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{\mu}(z) - R_n(z)\|_K^{1/3n} \leq \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_K^{1/3n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\zeta \in \gamma_r} |h_n(\zeta)|^{1/3n}}. \quad (5.3)$$

De (3.26), (3.17) y de la convergencia uniforme de  $|w_n v_n|^{1/n}$  se deduce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |h_n(z)|^{1/3n} = \exp\{-G_\Omega(\nu, z)\}, \quad (5.4)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{L \cup E\}$ . Usando (3.26), (3.17) y el principio del descenso, tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |h_n(z)|^{1/3n} \leq \exp\{-G_\Omega(\nu, z)\}, \quad (5.5)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus E$ . Gracias a (5.4) y (5.5), obtenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_K^{1/3n} \leq \|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_K \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\zeta \in \gamma_r} |h_n(\zeta)|^{1/3n} = \exp -r. \quad (5.6)$$

Las relaciones (5.6) junto con (5.3) dan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{\mu}(z) - R_n(z)\|_K^{1/3n} \leq \exp r \|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_K.$$

El primer miembro de esta desigualdad no depende de  $r$ ; por tanto, podemos hacer tender  $r$  a  $\|G_\Omega(\nu; \zeta)\|_{C_0(S(\mu))}$  llegando a probar (5.2) para subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus E$ . Como la función dentro del signo de norma en el primer miembro de (5.2)

es analítica en un entorno del infinito, utilizando el principio del máximo es obvio que (5.2) es también válido para cualquier  $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ .

□

En caso de que  $w_n \equiv v_n \equiv 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , podemos apoyarnos en el teorema 3.14 (véase el comentario después del corolario 3.2) para obtener el siguiente

**Corolario 5.4** Sea  $\mu \in \text{Reg}$  y  $\text{cap}(S(\mu)) > 0$ . Entonces, en todo subconjunto compacto  $K$  de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ , se cumple

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\mu}(z) - R_n(z)\|_K^{1/3n} \leq \|\exp\{-g_\Omega(z, \infty)\}\|_K \|\exp\{g_\Omega(z, \infty)\}\|_{\text{Co}(S(\mu))}.$$

## § V.3 Fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod

Como dijimos en la introducción del capítulo III, los polinomios de Stieltjes han sido objeto de gran atención recientemente a causa de su relación con la llamada fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x) dx = \sum_{k=1}^n \sigma_{k,n} f(x_{k,n}) + \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_{k,n} f(y_{k,n}) + E_n(f), \quad (5.7)$$

donde  $\{x_{k,n}\}$  son los ceros del polinomio  $p_n$  ortogonal con respecto a la medida  $d\mu = w dx$ . Los nodos  $\{y_{k,n}\}$  y los pesos  $\{\sigma_{k,n}\}$ ,  $\{\gamma_{k,n}\}$  son elegidos de tal manera que el grado de exactitud de la fórmula sea el mayor posible. Es fácil ver que si, fijado un peso,  $E_n(f) = 0$  para todos los polinomios de grado menor o igual que  $3n + 1$ , entonces los nodos  $y_{k,n}$  deben ser los ceros del polinomio de Stieltjes  $S_{n+1}$ . El enunciado recíproco también resulta ser cierto si los ceros de los polinomios de Stieltjes  $S_{n+1}$  son simples y distintos de los ceros del polinomio  $p_n$ . De hecho, hay una equivalencia entre la construcción de los polinomios de Stieltjes y la fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod si se consideran nodos de multiplicidad mayor que 1. Kronrod (véase [56]) fue el primero en considerar esta clase de fórmulas tomando



como nodos los ceros de los polinomios de Legendre y de los correspondientes polinomios de Stieltjes. Pueden verse resultados relacionados con este tema en [37], [38], [74], [75] y [88].

Desde el punto de vista de los procesos de cuadratura es importante saber si los nodos son simples, sus propiedades de entrelazamiento y, sobre todo, si están contenidos en el conjunto donde la función que va a ser integrada está definida. Como  $S_n$  es ortogonal respecto a un peso que cambia de signo, las ecuaciones (3.2) no garantizan en general que los ceros de  $S_n$  estén en  $[-1, 1]$ , que sean simples y que sean distintos de los ceros de  $p_{n-1}$ , y ni siquiera que sean reales. Sin embargo, para el caso del peso ultrasférico, ya dijimos que Szegő [114] demostró que estas propiedades se verifican para todo  $n$ . Las propiedades de entrelazamiento de los ceros y la positividad de los coeficientes que aparecen en la fórmula de cuadratura también han sido estudiados, en el caso de pesos que incluyen el caso ultrasférico, en los trabajos [31], [32], [88] y [89]. Hay varias estimaciones para la fórmula del error en la fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod para funciones con diferentes propiedades de derivabilidad. Para el caso de funciones analíticas, véase [33] y [82]. En relación con la interpolación de Lagrange, véase también [34] y [35].

Consideremos la descomposición en fracciones simples del aproximante  $R_n$

$$R_n(z) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{M_i} \frac{j! a_{i,j,n}}{(z - z_{n,i})^{j+1}}.$$

El símbolo  $N$  denota el número total de polos distintos de la función  $R_n$ . Los puntos  $z_{n,i}$  son los ceros de  $s_{n,n+1} p_{n,n}$ . Si bien los ceros de  $p_{n,n}$  son simples pueden coincidir con los ceros de  $s_{n,n+1}$ ; por tanto, dados  $z_{n,i}$  cualquier valor de  $M_i$  es posible. Obviamente,  $N = N(n)$  y  $M_i = M_i(n)$ , pero, a fin de simplificar la notación, omitiremos hacer referencia de modo explícito a esta dependencia..

Sea  $f$  una función analítica en un entorno  $V$  del conjunto compacto  $E$ . Pongamos

$$I(f) = \int f(x) d\mu(x), \quad I_n(f) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{M_i} a_{i,j,n} f^{(j)}(z_{n,i}), \quad E_n(f) = I(f) - I_n(f). \quad (5.8)$$

Bajo las condiciones del teorema 3.15, se deduce del corolario 3.2 que para  $n \geq n_0(V)$  todos los ceros de  $s_{n,n+1}$  están contenidos en  $V$  y las expresiones anteriores tienen

sentido. En lo sucesivo, sólo consideraremos números naturales  $n$  suficientemente grandes. Obsérvese que si todos los ceros  $z_{n,i}$  son simples (lo cual no se sabe en general) y  $w_n \equiv v_n \equiv 1, n \in \mathbb{N}$ , entonces  $I_n$  es la fórmula de cuadratura de Gauss-Kronrod. Este hecho se pone de manifiesto en el siguiente lema.

**Lema 5.6** *Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N_0$  se cumple*

$$I\left(\frac{h}{w_n v_n}\right) = I_n\left(\frac{h}{w_n v_n}\right),$$

donde  $h$  es cualquier polinomio de grado menor o igual que  $3n + 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $V$  un entorno de  $E$  tal que  $V \cap L = \emptyset$ . Sea  $\gamma$  una curva de Jordan analítica tal que  $V$  está en la componente conexa acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  y  $L$  en la no acotada. Para  $n \geq N_0$ , todos los ceros de  $S_{n,n+1}$  pertenecen a  $V$  y todos los de  $w_n v_n$  a la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ . Gracias a (5.1) sabemos que  $(\hat{\mu} - R_n)/(w_n v_n)$  es holomorfa en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{V}$  y

$$\frac{\hat{\mu} - R_n}{w_n v_n}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{3n+3}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Entonces, si  $h$  es cualquier polinomio de grado menor o igual que  $3n + 1$ ,  $h(\hat{\mu} - R_n)/(w_n v_n)$  tiene un cero en infinito de multiplicidad al menos dos. Por tanto podemos usar el teorema de Cauchy, el de Fubini y la fórmula integral de Cauchy para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{h(\hat{\mu} - R_n)}{w_n v_n}(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \frac{h\hat{\mu}}{w_n v_n}(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma} \frac{hR_n}{w_n v_n}(\zeta) d\zeta \\ &= 2\pi i \left[ \int \frac{h}{w_n v_n}(x) d\mu(x) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{M_i} a_{i,j,n} \left(\frac{h}{w_n v_n}\right)^{(j)}(z_{n,i}) \right] \\ &= 2\pi i \left[ I\left(\frac{h}{w_n v_n}\right) - I_n\left(\frac{h}{w_n v_n}\right) \right], \quad n \geq N_0. \end{aligned}$$

□

Probemos ahora

**Teorema 5.22** *Sea  $f$  una función analítica definida en un entorno simplemente conexo  $V$  de  $E$ . Entonces, bajo las condiciones del teorema 5.21, se cumple*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |I(f) - I_n(f)|^{1/3n} \leq \|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_{\partial V} \|\exp\{G_\Omega(\nu; z)\}\|_{\text{Co}(S(\mu))}. \quad (5.9)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $W$  un entorno de  $E$  de modo que  $\overline{W} \subset V$ . Existe un número natural  $n_0(W)$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq n_0(W)$  el polinomio  $s_{n,n+1}$  tiene todos sus ceros contenidos en el conjunto  $W$ .

Sea  $\gamma$  una curva de Jordan analítica contenida en  $V$  tal que  $W$  pertenece a la componente conexa acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ . Utilizando razonamientos parecidos a los usados en la demostración del lema 5.6, es fácil comprobar que

$$I(f) - I_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\hat{\mu} - R_n)(\zeta) d\zeta.$$

De esta igualdad y de (5.2), se obtiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |I(f) - I_n(f)|^{1/3n} \leq \|\exp\{-G_\Omega(\nu; z)\}\|_\gamma \|\exp\{G_\Omega(\nu; z)\}\|_{\text{Co}(S(\mu))}.$$

Podemos ahora elegir la curva  $\gamma$  tan cercana al conjunto  $\partial V$  como queramos, por lo que (5.9) se deduce inmediatamente. □

En particular, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f)$$

y la razón de convergencia es, al menos, geométrica de orden  $3n$ . Obsérvese que cuanto más cercano se encuentre  $\partial V$  al conjunto  $E$ , más despacio  $I_n(f)$  tiende a  $I(f)$ .

En el caso en que  $w_n \equiv v_n \equiv 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se obtiene

**Corolario 5.5** *Sea  $f$  una función analítica definida en un entorno simplemente conexo  $V$  de  $E$ . Sea  $\mu \in \text{Reg}$  y  $\text{cap}(S(\mu)) > 0$ . Entonces, se cumple*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)|^{1/3n} \leq \|\exp\{-g_\Omega(z, \infty)\}\|_{\partial V} \|\exp\{g_\Omega(z, \infty)\}\|_{\text{Co}(S(\mu))}.$$

Recuérdese que en esta situación la regularidad de  $S(\mu)$  no se necesita para tener las fórmulas (3.17) y (3.26).

## § V.4 Funciones meromorfas tipo Markov

El problema siguiente fue planteado por by A. A. Gonchar en [42]. Consideremos la función

$$f(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x} + r(z),$$

donde  $r$  es una función racional cuyos polos están en  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  y  $r(\infty) = 0$ . En esta situación,  $f$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ ; los polos de  $f$  y su multiplicidad son desconocidos y deberían ser encontrados por medio de los aproximantes por lo que funciones racionales con todos los polos fijos no sirven y es necesario usar aproximantes con todos o parte de los polos libres. En [42], Gonchar probó la convergencia de la sucesión de aproximantes de Padé a  $f$  uniformemente en subconjuntos compactos de la región obtenida quitando los polos de  $r$  a  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ , bajo la condición que la parte absolutamente continua de la medida  $\mu$  es positiva en casi todo punto de  $S(\mu)$ . En la demostración se usa de manera esencial el comportamiento asintótico del cociente de polinomios ortogonales. Más tarde, E.A. Rakhmanov demostró que la convergencia no puede ser válida en general para medidas positivas  $\mu$  arbitrarias y cualquiera función racional  $r$  (cf. [91]); esto es debido al posible mal comportamiento de los polos de los aproximantes. Muchos resultados en aproximación racional (por ejemplo, véase [40], lema 1 y [42]) señalan que el ingrediente clave para probar convergencia es conseguir mantener los polos de los aproximantes bajo control. Si los coeficientes de  $r$  son reales entonces todos los polos de los aproximantes racionales, excepto, quizás, un número independiente de  $n$ , están en  $\text{Co}(S(\mu))$ . Este hecho fue utilizado por Rakhmanov para probar la convergencia de la sucesión de los aproximantes de Padé a la función  $f$  sin ninguna restricción sobre la medida  $\mu$  (véase [91]) si los coeficientes de  $r$  son reales. Nuestro objetivo en lo que resta de capítulo es generalizar el trabajo de Rakhmanov utilizando aproximantes multipuntuales tipo Padé.

Sea  $r$  una función racional con coeficientes reales cuyos polos pertenezcan al conjunto  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  y  $r(\infty) = 0$ . El conjunto de polos de  $r$  será denotado por  $\mathcal{P}$ . Pongamos

$$f(z) = \hat{\mu}(z) + r(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (S(\mu) \cup \mathcal{P})$$

y

$$r(z) = \frac{s_d(z)}{t_d(z)},$$

donde  $\text{gr } s_d \leq d - 1$ ,  $\text{gr } t_d = d$ . También supondremos que  $s_d$  y  $t_d$  no tienen factores comunes.

Sea  $\{L_n\}, n \in \mathbb{N}$ , una sucesión de polinomios mónicos cuyos ceros estén en  $\text{Co}(S(\mu))$ . Se puede sustituir esta condición por la de que todos los puntos límite de los ceros de  $L_n$  estén en  $\text{Co}(S(\mu))$ , que es una condición ligeramente más débil. Supongamos que  $\text{gr } L_n = k(n) \leq n$  y  $n - k(n) > 2d$ . Fijemos otra familia de polinomios mónicos

$$w_n(z) = \prod_{i=1}^{2n} (z - w_{n,i}),$$

cuyos ceros estén contenidos en el conjunto compacto  $L \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus (\text{Co}(S(\mu)) \cup \mathcal{P})$  y sean simétricos con respecto a la recta real, contando la multiplicidad. En el caso que para algún  $i$ ,  $w_{n,i} = \infty$ , se elimina el factor correspondiente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $w_n$  y  $t_d$  son positivos en  $S(\mu)$ .

Es fácil verificar, recordando todas las definiciones anteriores, que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una única función racional  $R_n(f) = p_n/(q_n L_n^2)$ , donde  $p_n$  y  $q_n$  satisfacen las siguientes condiciones:

- $\text{gr } q_n \leq n - k(n)$ ,  $\text{gr } p_n \leq n + k(n) - 1$  y  $q_n \neq 0$ .
- $\frac{q_n L_n^2 f - p_n}{w_n} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (S(\mu) \cup \mathcal{P}))$ .
- $\frac{q_n L_n^2 f - p_n}{w_n}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n-k(n)+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty$ .

$R_n(f)$  es el APROXIMANTE MULTIPUNTUAL TIPO PADÉ de  $f$  con polos prefijados en los ceros de  $L_n^2$ , que interpola a la función  $f$  en los ceros del polinomio  $w_n$ .



Presentemos la principal condición suficiente que será necesaria para probar el teorema 5.23. Consideramos  $w(z) = \exp(-\int \log |z-t| d\nu(t))$ . Pediremos que se verifique

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w^{k(n)} L_n\|_{S(\mu)}^{1/k(n)} \leq \exp(-F_w), \quad (5.10)$$

donde  $F_w$  es la constante de Robin modificada asociada a  $w$ . Esta condición no es más que la fórmula (3.13) escrita para los polinomios  $L_n$  y, por tanto, sabemos que está relacionada con el comportamiento asintótico de los ceros del polinomio  $L_n$  en  $S(\mu)$ .

## § V.5 Resultados auxiliares

De la definición de aproximante multipuntual tipo Padé se deduce fácilmente (cf. [21], lema 1 ó [39], §2.3)

**Lema** *Se cumple*

$$\int x^j q_n(x) \frac{t_d(x) L_n^2(x)}{w_n(x)} d\mu(x) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - k(n) - d - 1 \quad (5.11)$$

y

$$f(z) - R_n(f)(z) = \frac{w_n(z)}{(t_d q_n L_n^2 h)(z)} \int \frac{(t_d q_n L_n^2 h)(x)}{w_n(x) (z-x)} d\mu(x), \quad (5.12)$$

donde  $h$  es cualquier polinomio de grado menor o igual que  $n - k(n) - d$  y  $z$  pertenece a  $\overline{\mathbb{C}} \setminus (S(\mu) \cup \mathcal{P})$ .

A partir de ahora, representaremos los polinomios  $w_n$  de la siguiente manera. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pongamos  $w_n = u_n v_n$ , donde

$$u_n(z) = \prod_{i=1}^{2k(n)+4d} (z - u_{n,i}), \quad v_n(z) = \prod_{j=1}^{2n-2k(n)-4d} (z - v_{n,j}),$$

de modo que los ceros sean (en cada familia) simétricos con respecto al eje real, contando la multiplicidad. En el caso que, para algún  $i$  ó  $j$ ,  $u_{n,i} = \infty$  ó  $v_{n,j} = \infty$ , se debe eliminar el factor correspondiente. Sin pérdida de generalidad, podemos

suponer que  $u_n$  y  $v_n$  son positivos en  $S(\mu)$ . Deseamos recalcar que los lemas 5.7 a 5.9, que demostraremos a continuación, son válidos para cualquier descomposición de  $w_n$  del tipo anterior. En la demostración del teorema 5.23 seleccionaremos  $u_n$  y  $v_n$  de modo adecuado conforme al lema 5.10.

Como consecuencia de (5.11), el polinomio  $q_n$  tiene al menos  $n - k(n) - d$  cambios de signo en  $\text{Co}(S(\mu))$  (cf. [113], §3.3). Entonces,  $q_n$  se puede representar de la forma  $q_n = q_{n,1} q_{n,2}$ , donde  $\text{gr } q_{n,1} \geq n - k(n) - d$  y los ceros  $\{x_{n,i}\}$ ,  $i = 1, \dots, n'$  de  $q_{n,1}$  son simples y pertenecen a  $\text{Co}(S(\mu))$ . El polinomio  $q_{n,2}$  no cambia de signo en  $\text{Co}(S(\mu))$ ; y  $\text{gr } q_{n,2} \leq d$ . Consideremos

$$p_{n,1}(z) = \int \frac{q_{n,1}(z)v_n(x) - q_{n,1}(x)v_n(z)}{(z-x)v_n(x)} d\mu_n(x),$$

$$d\mu_n(x) = \frac{t_d q_{n,2} L_n^2}{u_n}(x) d\mu(x).$$

**Lema 5.7** *Se cumple*

$$(t_d q_{n,2} L_n^2)(f - R_n(f))(z) = u_n(z) \left( \hat{\mu}_n(z) - \frac{p_{n,1}}{q_{n,1}}(z) \right), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu)). \quad (5.13)$$

$$\frac{p_{n,1}}{q_{n,1}}(z) = \sum_{i=1}^{n'} \frac{\lambda_{n,i}}{z - x_{n,i}}, \quad \lambda_{n,i} = \int \frac{q_{n,1}(x) v_n(x_{n,i})}{q'_{n,1}(x_{n,i}) (x - x_{n,i})} \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)}. \quad (5.14)$$

**DEMOSTRACIÓN** De la definición de  $p_{n,1}$ , se obtiene

$$p_{n,1}(z) = q_{n,1}(z) \hat{\mu}_n(z) - v_n(z) \int \frac{q_{n,1}(x)}{(z-x)v_n(x)} d\mu_n(x),$$

o, equivalentemente,

$$\hat{\mu}_n(z) - \frac{p_{n,1}}{q_{n,1}}(z) = \frac{v_n(z)}{q_{n,1}(z)} \int \frac{q_{n,1}(x)}{(z-x)v_n(x)} d\mu_n(x). \quad (5.15)$$

Usando la fórmula de Hermite (5.12) con  $h \equiv 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{v_n(z)}{q_{n,1}(z)} \int \frac{q_{n,1}(x)}{(z-x)v_n(x)} d\mu_n(x) &= \frac{v_n(z)}{q_{n,1}(z)} \int \frac{(t_d q_n L_n^2)(x)}{(u_n v_n)(x)(z-x)} d\mu(x) \\ &= \frac{(t_d q_{n,2} L_n^2)(z)}{u_n(z)} (f - R_n(f))(z). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ahora, las fórmulas (5.15) y (5.16) juntas dan (5.13). Más aún

$$\frac{p_{n,1}}{q_{n,1}}(z) = \widehat{\mu}_n(z) - \frac{v_n(z)}{q_{n,1}(z)} \int \frac{(t_d q_n L_n^2)(x)}{(u_n v_n)(x)(z-x)} d\mu(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right),$$

debido a las relaciones de ortogonalidad (5.11) y teniendo en cuenta los posibles grados de los polinomios  $v_n$  y  $q_{n,1}$ . Así,  $\text{gr } p_{n,1} < \text{gr } q_{n,1}$  y, por tanto

$$\frac{p_{n,1}}{q_{n,1}}(z) = \sum_{i=1}^{n'} \frac{\lambda_{n,i}}{z - x_{n,i}} \quad \text{donde} \quad \lambda_{n,i} = \lim_{z \rightarrow x_{n,i}} (z - x_{n,i}) \frac{p_{n,1}}{q_{n,1}}(z).$$

Si, en este punto, utilizamos la fórmula integral que define  $p_{n,1}$ , obtenemos (5.14) y la demostración del lema está completa. □

Consideremos el siguiente funcional lineal  $\Lambda_n$ . Sea  $\varphi$  una función definida en  $\text{Co}(S(\mu))$ , entonces

$$\Lambda_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{n'} \lambda_{n,i} \frac{\varphi(x_{n,i})}{v_n(x_{n,i})}.$$

El siguiente lema es un análogo de la fórmula de cuadratura de Gauss-Jacobi.

**Lema 5.8** *Para todo polinomio  $P$  con  $\text{gr } P < 2n - 2k(n) - 2d$ , se cumple*

$$\int P(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)} = \Lambda_n(P). \quad (5.17)$$

**DEMOSTRACIÓN** Sea  $L$ ,  $\text{gr } L < n'$ , el polinomio de Lagrange que interpola al polinomio dado  $P$ ,  $\text{gr } P < 2n - 2k(n) - 2d$ , en los puntos  $x_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, n'$ . Tenemos  $P = L + q_{n,1} T$ , donde  $T$  es un polinomio de grado menor que  $n - k(n) - d$ . Integrando la ecuación  $P = L + q_{n,1} T$  y usando (5.11) y (5.14), obtenemos

$$\int P(x) \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)} = \sum_{i=1}^{n'} P(x_{n,i}) \int \frac{q_{n,1}(x)}{q'_{n,1}(x_{n,i})(x - x_{n,i})} \frac{d\mu_n(x)}{v_n(x)} = \Lambda_n(P),$$

con lo que la prueba está completa. □

De este último resultado se deduce inmediatamente

**Lema 5.9** *El número de coeficientes positivos  $\lambda_{n,i}$  en (5.14) es al menos  $n - k(n) - d$ .*

**DEMOSTRACIÓN** Sea  $N$  el número de  $\lambda_{n,i}$  positivos (para un  $n$  fijo). Póngase  $P(z) = \prod^+ (z - x_{n,i})^2$ , donde  $\prod^+$  denota el producto en los índices  $i$  para los cuales  $\lambda_{n,i} > 0$ . Si  $\text{gr } P = 2N < 2n - 2k(n) - 2d$ , la fórmula (5.17) se puede aplicar a  $P$ , y llegamos a una contradicción (el primer miembro de la fórmula es positivo y el segundo no). Así  $N > n - k(n) - d$ , lo que prueba el lema.  $\square$

El siguiente lema muestra que se pueden elegir los polinomios  $u_n$  y  $v_n$  de modo que las sucesiones hereden la distribución asintótica de ceros de  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Si bien es cierto en una situación más general, nos limitamos a enunciarlo con las hipótesis adecuadas para utilizarlo en la demostración del teorema 5.23.

**Lema 5.10** *Supongamos que la sucesión de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\text{gr } w_n = n$ , tiene la medida  $\nu$  como su distribución asintótica de ceros y  $S(\nu) \subset \mathbb{C}$ . Sea  $k(n) \in \mathbb{N}$  tal que  $k(n) \leq n$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} n - k(n) = \infty$  entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existen polinomios  $u_n$  y  $v_n$  tales que  $w_n = u_n v_n$ ,  $\text{gr } u_n = k(n)$ , y*

$$\Lambda_{u_n} \xrightarrow{*} \nu, \quad n \rightarrow \infty, \quad \Lambda_{v_n} \xrightarrow{*} \nu, \quad n \rightarrow \infty.$$

**DEMOSTRACIÓN** Fijemos un cuadrado cerrado  $Q$  tal que el soporte de  $\nu$  está contenido en  $Q$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todos los ceros de los polinomios  $w_n$  pertenecen a  $Q$ . Para cada entero positivo  $n$ , dividimos el cuadrado  $Q$  en  $m(n)$  cuadrados disjuntos (no necesariamente cerrados):  $Q = \cup_{j=1}^{m(n)} Q_j^n$ . De modo que  $m(n) = o(k(n))$ ,  $m(n) = o(n - k(n))$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) = \infty$  cumpliéndose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{j=1, \dots, m(n)} |Q_j^n| \right) = 0, \quad \text{donde} \quad |A| = \max_{\{a, b \in A\}} |a - b|.$$

Construimos ahora el polinomio  $u_n$  de la siguiente manera. En cada cuadrado  $Q_j^n$  elegimos  $[k(n) \Lambda_{w_n}(Q_j^n)]$  ceros de  $w_n$ , donde  $[\cdot]$  denota la parte entera. Estos ceros constituyen los ceros de  $u_n$ , el resto define  $v_n$ . Los polinomios  $u_n$  y  $v_n$  así definidos

no tienen el grado que dice el enunciado del lema. Corregiremos esto más adelante. Obsérvese que la diferencia de los grados es, a lo sumo,  $m(n)$  para cada uno de ellos.

El polinomio  $u_n$  satisface

$$k(n) \Lambda_{w_n}(Q_j^n) - 1 \leq \Upsilon_{u_n}(Q_j^n) \leq k(n) \Lambda_{w_n}(Q_j^n), \quad j = 1, \dots, m(n), \quad (5.18)$$

donde  $\Upsilon_{u_n}$  representa la medida que tiene en cada cero de  $u_n$  una masa igual a la multiplicidad del cero. De (5.18) se deduce

$$\Lambda_{w_n}(Q) - \frac{m(n)}{k(n)} \leq \frac{\Upsilon_{u_n}(Q)}{k(n)} \leq \Lambda_{w_n}(Q).$$

Análogamente

$$\Lambda_{w_n}(Q) \leq \frac{\Upsilon_{v_n}(Q)}{n - k(n)} \leq \Lambda_{w_n}(Q) + \frac{m(n)}{n - k(n)}.$$

Sea  $h$  una función continua en  $\mathbb{C}$ . Podemos suponer que  $h$  es real y positiva. Denotemos por  $M$  el máximo de  $h$  en  $Q$  y por  $M_j^n$  y  $m_j^n$  el máximo y el mínimo, respectivamente, de  $h$  en la clausura de  $Q_j^n$ . Podemos también suponer, debido a la continuidad uniforme, que  $M_j^n - m_j^n \leq \delta_n$ , donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ . Gracias a (5.18), tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_j^n} h d\Lambda_{w_n} - \int_{Q_j^n} h d\Lambda_{u_n} \right| &\leq M_j^n \Lambda_{w_n}(Q_j^n) - m_j^n \Lambda_{u_n}(Q_j^n) \\ &\leq (M_j^n - m_j^n) \Lambda_{w_n}(Q_j^n) + \frac{m_j^n}{k(n)}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_Q h d\Lambda_{w_n} - \int_Q h d\Lambda_{u_n} \right| &\leq \sum_{j=1}^{m(n)} \left| \int_{Q_j^n} h d\Lambda_{w_n} - \int_{Q_j^n} h d\Lambda_{u_n} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m(n)} \left[ (M_j^n - m_j^n) \Lambda_{w_n}(Q_j^n) + \frac{m_j^n}{k(n)} \right] \leq \delta_n + M \frac{m(n)}{k(n)}, \end{aligned}$$

donde el último miembro tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito. La convergencia débil\* de  $\Lambda_{v_n}$  se prueba de modo análogo.

Para corregir ahora el grado de  $u_n$  y  $v_n$  conforme al enunciado del lema, sólo tenemos que pasar de uno de estos polinomios al otro a lo más  $m(n)$  ceros. Como  $m(n) = o(k(n))$  y  $m(n) = o(n - k(n))$  los nuevos polinomios preservan el límite débil\* de los anteriores. La prueba está terminada.

□

El siguiente lema fue probado por Gonchar en [40].

**Lema** *Supongamos que la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas en el dominio  $D \subset \mathbb{C}$  converge a una función  $f$  en capacidad en subconjuntos compactos de  $D$ . Entonces son ciertos los siguientes enunciados:*

1. *Si las funciones  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  son holomorfas en  $D$ , entonces la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $D$  y  $f$  es holomorfa en  $D$  (con más precisión, es igual a una función holomorfa en  $D$  excepto en un conjunto de capacidad cero).*
2. *Si cada una de las funciones  $f_n$  es meromorfa en  $D$  y tiene como mucho  $k < +\infty$  polos en este dominio, entonces la función límite  $f$  es también meromorfa y tiene como mucho  $k$  polos en  $D$ .*
3. *Si cada una de las funciones  $f_n$  es meromorfa y tiene como mucho  $k < +\infty$  polos en  $D$  y la función  $f$  es meromorfa y tiene exactamente  $k$  polos en  $D$ , entonces todas las funciones  $f_n$ ,  $n \geq N$ , tienen también  $k$  polos en  $D$ ; los polos de  $f_n$  tienden a los polos  $z_1, \dots, z_k$  de  $f$  (teniendo en cuenta su multiplicidad) y la sucesión  $\{f_n\}$  tiende a  $f$  uniformemente en subconjuntos compactos del dominio  $D' = D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ .*

## § V.6 Aproximación de funciones de Markov meromorfas

**Teorema 5.23** *Supongamos que la sucesión de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene  $\nu$  como su distribución asintótica de ceros y que  $\text{cap}(S(\mu)) > 0$ . Si  $k(n) = o(n)$  o se cumple (5.10), entonces*

1. Para todo  $n$  suficientemente grande,  $\text{gr } q_n = n - k(n)$  y el número de polos de  $R_n(f)$  en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  es igual al número de polos de  $r$ . Los polos de  $R_n(f)$  en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  tienden, cuando  $n \rightarrow \infty$ , a los polos de  $r$  (de tal manera que cada polo de  $r$  "atrae" exactamente tantos polos como su multiplicidad).
2. En cada subconjunto compacto  $K$  de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\text{Co}(S(\mu)) \cup \mathcal{P})$ , tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - R_n(f)\|_K^{1/2n} \leq \|\exp\{-G_\Omega(\nu; \cdot)\}\|_K.$$

DEMOSTRACIÓN. En lo sucesivo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $L$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  por el mismo razonamiento que empleamos al comienzo de la sección § III.4.

Dividimos la demostración en tres partes. En la primera obtenemos una estimación general del tamaño de  $f - R_n(f)$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . En este punto debemos manejar dos problemas; concretamente, los polos de  $R_n(f)$  (que son los ceros de  $q_{n,2}$ ) los cuales pueden estar en  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  (y, de hecho, algunos sí están), y los ceros de  $q_{n,1}$  que tienen coeficiente  $\lambda_{n,i}$  negativo. Afortunadamente, el número de puntos con estas "malas" propiedades no depende de  $n$  cuando  $n$  tiende a infinito. Para tratar estos problemas seguimos argumentos utilizados en la demostración del teorema que aparece en [59]. El estimado general obtenido en la primera parte nos permite dar cotas adecuadas en la segunda utilizando técnicas de la teoría del potencial. Las cotas de la parte segunda proporcionan convergencia en capacidad de  $R_n(f)$  a  $f$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  y, con la ayuda del lema de Gonchar, se concluye la demostración en la tercera parte.

1. Sea  $w_n = u_n v_n$  cualquier descomposición de  $w_n$  tal como fue definida al comienzo de la sección § V.5. Sea  $\rho_n(z) = \prod^-(z - x_{n,i})^2$ , donde  $\prod^-$  denota el producto tomado sobre los índices  $i$  para los que  $\lambda_{n,i} < 0$ . Del lema 5.9 se deduce que  $\text{gr } \rho_n \leq 2d$ . Consideremos las funciones

$$\Phi_n(z) = \frac{\rho_n q_{n,2} t_d L_n^2(z)}{u_n} (f - R_n(f))(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu)).$$

Para todo  $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ , utilizando (5.13) y (5.14), se tiene

$$\Phi_n(z) = \rho_n(z) \left[ \hat{\mu}_n(z) - \frac{p_{n,1}}{q_{n,1}}(z) \right] = \rho_n(z) \left[ \hat{\mu}_n(z) - \Lambda_n \left( \frac{v_n(x)}{z - x} \right) \right].$$



Denótese

$$K_n(x; z) = \frac{\rho_n(z) - \rho_n(x)}{(z - x) \rho_n(z)},$$

$K_n$  es un polinomio (en  $x$ ) de grado menor que  $2d$ . Se cumple

$$\frac{1}{z - x} - K_n(x; z) = \frac{\rho_n(x)}{\rho_n(z)} \frac{1}{z - x}.$$

De la anterior representación de  $\Phi_n$  y del lema 5.8, se deduce (recordemos que  $n - k(n) > 2d$ )

$$\begin{aligned} \Phi_n(z) &= \rho_n(z) \int \left( \frac{1}{z - x} - K_n(x; z) \right) d\mu_n(x) \\ &\quad - \rho_n(z) \Lambda_n \left( \frac{v_n(x)}{z - x} - v_n(x) K_n(x; z) \right) \\ &= \int \rho_n(x) \frac{d\mu_n(x)}{z - x} - \Lambda_n \left( \rho_n(x) \frac{v_n(x)}{z - x} \right), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu)). \end{aligned}$$

Sea  $K$  un subconjunto compacto arbitrario de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . Por un lado

$$\left| \int \rho_n(x) \frac{d\mu_n(x)}{z - x} \right| \leq M(K) \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \|q_{n,2} t_d\|_{S(\mu)}, \quad z \in K, \quad (5.19)$$

donde  $M(K)$  denota una constante que puede depender de  $K$  pero no de  $n$ . En lo que sigue, en cada aparición,  $M(K)$  puede denotar una constante diferente con las mismas características.

Por otra parte, usando el lema 5.8, obtenemos (obsérvese que  $\rho_n(x_{n,i}) = 0$  cuando  $\lambda_{n,i} < 0$ )

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_n \left( \rho_n(x) \frac{v_n(x)}{z - x} \right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n'} \lambda_{n,i} \frac{\rho_n(x_{n,i})}{z - x_{n,i}} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n'} \lambda_{n,i} \frac{\rho_n(x_{n,i})}{|z - x_{n,i}|} \leq M(K) \sum_{i=1}^{n'} \lambda_{n,i} \rho_n(x_{n,i}) \\ &= M(K) \int \rho_n(x) d\mu_n(x) \leq M(K) \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \|q_{n,2} t_d\|_{S(\mu)}, \quad z \in K. \end{aligned} \quad (5.20)$$



Por tanto, con la ayuda de (5.19) y (5.20), obtenemos

$$|\Phi_n(z)| \leq M(K) \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \|q_{n,2} t_d\|_{S(\mu)}, \quad z \in K, \quad (5.21)$$

donde  $K$  es un subconjunto compacto arbitrario de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ .

2. Sea  $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos compactos regulares contenidos en  $\text{Co}(S(\mu))$  tal que  $K_{m+1} \subset K_m$  y  $S(\mu) = \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$ . Podemos suponer que cada  $K_m$  es una unión finita de intervalos. Denotemos por  $\mu_{w,m}$  y  $F_{w,m}$  la medida de equilibrio en  $K_m$  y la constante de Robin modificada, respectivamente, asociadas con el campo externo  $w(z) = \exp P(\nu; z)$ . Pongamos  $\Omega_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus K_m$  y sea  $G_{\Omega_m}(\nu; \zeta)$  el correspondiente potencial de Green. Sea  $m$  un número natural arbitrario y fijo. A la vista de (5.11),  $q_{n,1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tiene, a lo más,  $d+1$  ceros simples en cada componente conexa de  $\text{Co}(S(\mu)) \setminus S(\mu)$ . De esta manera, se puede representar  $q_{n,1}$  de la forma  $q_{n,1} = \tilde{q}_{n,1} h_n$ , donde  $\text{gr } h_n = a_n \leq A(m)$ ,  $n \geq N$ , y  $\tilde{q}_{n,1}$  tiene todos sus ceros en  $K_m$ .

Consideremos ahora las funciones

$$H_n(z) = \frac{\Phi_n(z) h_n(z)}{\|u_n^{-1} L_n^2\|_{S(\mu)} \|q_{n,2} t_d\|_{S(\mu)} v_n(z) \rho_n(z)}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K_m.$$

De la definición de aproximante multipuntual tipo Padé se ve fácilmente que

$$H_n \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}} \setminus K_m) \quad (5.22)$$

$$H_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{2n-2k(n)-2d-a_n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Sabemos también, debido a (5.21), que

$$|H_n(z) v_n(z)| \leq M(K), \quad z \in K, \quad (5.23)$$

donde  $K$  es un conjunto compacto cualquiera de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ , ya que  $h_n$  tiene todos sus ceros en  $\text{Co}(S(\mu))$  y su grado está acotado por  $A(m)$ .

Obsérvese que

$$h_n(z) [f(z) - R_n(f)(z)] = \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \frac{u_n(z)}{L_n^2(z)} H_n(z) v_n(z) \frac{\|q_{n,2} t_d\|_{S(\mu)}}{q_{n,2}(z) t_d(z)}, \quad (5.24)$$

donde  $z$  pertenece a  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . Nuestro próximo objetivo es probar que la sucesión

$$\left\{ \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \frac{u_n(z)}{L_n^2(z)} H_n(z) v_n(z) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (5.25)$$

converge a cero geométricamente uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . Para ello, estimamos por separado los factores

$$H_n(z) v_n(z) \quad \text{y} \quad \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \frac{u_n(z)}{L_n^2(z)}.$$

Empezamos con los factores del primer tipo. Sea  $K$  un subconjunto compacto arbitrario de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . Pongamos  $\gamma_\epsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} : \exp G_{\Omega_m}(\nu; \zeta) = 1 + \epsilon\}$ , donde  $\epsilon$  es una constante positiva suficientemente pequeña para que  $K$  y  $L$  estén en la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma_\epsilon$ . En virtud de (5.22), para cada  $n$ , la función

$$|H_n(z)| [\exp(F_{w,m} - P(\mu_{w,m}; z))]^{2n-2k(n)-2d-a_n}$$

es subarmónica en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_m$ . Teniendo en cuenta (5.23), obtenemos que

$$\begin{aligned} & |H_n(z) v_n(z)| [\exp(F_{w,m} - P(\mu_{w,m}; z))]^{2n-2k(n)-2d-a_n} \\ & \leq M(\gamma_\epsilon) [\exp(F_{w,m} - P(\mu_{w,m}; z))]^{2n-2k(n)-2d-a_n} \\ & \leq M(\gamma_\epsilon) [\exp(F_{w,m} - P(\mu_{w,m}; z))]^{2n-2k(n)-4d}, \quad z \in \gamma_\epsilon, \end{aligned}$$

donde  $M(\gamma_\epsilon)$  tiene las mismas características que  $M(K)$ . O, de modo equivalente, usando (3.15)

$$\begin{aligned} & |H_n(z)| [\exp(F_{w,m} - P(\mu_{w,m}; z))]^{2n-2k(n)-4d-a_n} \\ & \leq \frac{M(\gamma_\epsilon)}{|v_n(z)|} \frac{[\exp(G_{\Omega_m}(\nu; z))]^{2n-2k(n)-4d}}{[\exp(P(\nu; z))]^{2n-2k(n)-4d}}, \quad z \in \gamma_\epsilon. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Supongamos ahora que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n - k(n) = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = \infty$  (los casos acotados son más sencillos y serán tratados al final de la demostración). Elegimos  $u_n$  y  $v_n$ , gr  $v_n = 2n - 2k(n) - 4d$ , con la propiedad adicional de tener la medida  $\nu$  como su distribución asintótica de ceros, elección posible gracias al lema 5.10. Como el grado

de todos los polinomios que aparecen es par la elección puede ser hecha de tal modo que los ceros de  $u_n$  y  $v_n$  sean simétricos con respecto al eje real. Del hecho de que  $\nu$  es la distribución asintótica de ceros de  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se deduce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n(z)|^{1/\text{gr } v_n} = e^{-P(\nu; z)}, \quad (5.27)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus L$ , y usando el principio del descenso, tenemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |v_n(z)|^{1/\text{gr } v_n} \leq e^{-P(\nu; z)}, \quad (5.28)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . Para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, la desigualdad (5.26), junto con (5.27), implica

$$\begin{aligned} & |H_n(z)| [\exp(F_{w,m} - P(\mu_{w,m}; z))]^{2n-2k(n)-4d-a_n} \\ & \leq M(\gamma_\epsilon) \left( \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{2n-2k(n)-4d}, \quad z \in \gamma_\epsilon. \end{aligned}$$

Se deduce del principio del máximo para funciones subarmónicas que la misma desigualdad es cierta para cualquier  $z$  en  $K$ . Por tanto, usando (5.28), obtenemos que

$$\begin{aligned} |H_n(z) v_n(z)| &= |H_n(z)| [\exp(F_{w,m} - P(\mu_{w,m}; z))]^{2n-2k(n)-4d-a_n} \times \\ & |v_n(z)| [\exp(-F_{w,m} + P(\mu_{w,m}; z))]^{2n-2k(n)-4d-a_n} \leq M(\gamma_\epsilon) |v_n(z)| \times \\ & \left( \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{2n-2k(n)-4d} [\exp(-G_{\Omega_m}(\nu; z)) \exp(P(\nu; z))]^{2n-2k(n)-4d} \\ & \leq M(\gamma_\epsilon) \left( \frac{(1+\epsilon)^2}{1-\epsilon} \right)^{2n-2k(n)-4d} [\exp(-G_{\Omega_m}(\nu; z))]^{2n-2k(n)-4d}, \quad z \in K; \end{aligned} \quad (5.29)$$

para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

Por otra parte, (recuérdese que  $w(z) = \exp(P(\nu; z))$ )

$$\left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} = \left\| \frac{L_n^2 w^{2k(n)+4d}}{u_n w^{2k(n)+4d}} \right\|_{S(\mu)} \leq C \frac{\|L_n^2 w^{2k(n)}\|_{S(\mu)}}{\min_{\zeta \in S(\mu)} \{u_n(\zeta) w^{2k(n)+4d}(\zeta)\}},$$

donde  $C$  es una constante que puede ser diferente cada vez que aparece.

Por tanto, teniendo en cuenta (5.10) y (5.27) para  $u_n$ , tenemos que

$$\left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \leq C \left( \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{2k(n)} [\exp(-F_w)]^{2k(n)+4d}, \quad (5.30)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

La condición (5.10) implica que

$$\Lambda_{L_n} \xrightarrow{*} \mu_w, \quad n \rightarrow \infty,$$

lo que, a su vez, implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(z)|^{1/g^* L_n} = e^{-P(\mu_w; z)},$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus S(\mu)$ . Utilizando este hecho y (5.28) con  $u_n$  en vez de con  $v_n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{|u_n(z)|}{|L_n^2(z)|} &\leq M(K) \frac{|u_n(z)| [\exp(P(\nu; z))]^{2k(n)+4d}}{|L_n^2(z)| [\exp(P(\mu_w; z))]^{2k(n)}} \times \\ &[\exp(P(\mu_w; z) - P(\nu; z))]^{2k(n)+4d} \leq M(K) \left( \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{2k(n)} \times \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$[\exp(P(\mu_w; z) - P(\nu; z))]^{2k(n)+4d}, \quad z \in K,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. De (5.30) y (5.31), se deduce

$$\begin{aligned} \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \frac{|u_n(z)|}{|L_n^2(z)|} &\leq M(K) \left( \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{4k(n)} [\exp(-G_\Omega(\nu; z))]^{2k(n)+4d} \\ &\leq M(K) \left( \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{4k(n)} [\exp(-G_{\Omega_m}(\nu; z))]^{2k(n)+4d}, \quad z \in K, \end{aligned} \quad (5.32)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

Usando (5.29) y (5.32), tomando límites, y haciendo tender  $\epsilon$  a cero se deduce que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \frac{u_n(z)}{L_n^2(z)} H_n(z) v_n(z) \right\|_K^{1/2n} \leq \| \exp(-G_{\Omega_m}(\nu; \cdot)) \|_K, \quad (5.33)$$

para todo subconjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . De aquí se sigue inmediatamente que la sucesión (5.25) converge uniformemente a cero, con tasa geométrica, en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ .

Si  $n - k(n) \leq B$ ,  $B \in \mathbb{R}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , es obvio que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene  $\nu$  como su distribución asintótica de ceros. Entonces, se llega a (5.33) gracias a (5.23) y (5.32). Finalmente, obtenemos (5.33) en el caso general (por lo que respecta al tamaño de  $n - k(n)$ ) pasando a subsucesiones.

3. No es difícil deducir, utilizando (5.24) y (5.33), convergencia en capacidad de la sucesión  $R_n(f)$  a  $f$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . Para ello, fijemos un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  y elijamos un número  $R > 0$  tal que  $K$  y  $S(\mu)$  estén contenidos en el disco cerrado  $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ . Ahora dividimos los ceros  $z_{n,1}, \dots, z_{n,m_n}$  del polinomio  $q_{n,2} t_d$  en dos clases:  $\{z_{n,i}\}_{i \in I}$  denota los ceros de  $q_{n,2} t_d$  que pertenecen al disco  $D_{2R} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2R\}$  y  $\{z_{n,j}\}_{j \in J}$  denota el resto. Por otro lado, llamemos  $t_n \in \text{Co}(S(\mu))$  al punto donde el polinomio  $q_{n,2} t_d$  alcanza el máximo en  $\text{Co}(S(\mu))$ .

Si  $j \in J$  y  $z \in K$  se tiene

$$\frac{|z - z_{n,j}|}{|t_n - z_{n,j}|} \geq \frac{|z_{n,j}| - |z|}{|t_n| + |z_{n,j}|} \geq \frac{1/2 |z_{n,j}|}{2 |z_{n,j}|} = \frac{1}{4},$$

por tanto

$$\prod_{j \in J} \frac{|z - z_{n,j}|}{|t_n - z_{n,j}|} \geq \frac{1}{4^{\#J}}, \quad (5.34)$$

donde  $\#J$  denota el cardinal del conjunto  $J$ .

Por otra parte, si  $i \in I$  y  $z \in K$  entonces  $|t_n - z_{n,i}| \leq 4R$  por lo que

$$\prod_{i \in I} |t_n - z_{n,i}| \leq (4R)^{\#I}, \quad (5.35)$$

donde  $\#I$  denota el cardinal del conjunto  $I$ . La capacidad del conjunto

$$e_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : \prod_{i \in I} |z - z_{n,i}| \leq \frac{1}{n^{\#I}} \right\}$$

es igual a  $1/n$  (véase el teorema 5.2.5 en [96]). De este hecho, de (5.34) y de (5.35) se deduce que

$$\max_{z \in K \setminus e_n} |f(z) - R_n(f)(z)| \leq (16Rn)^{2d} \max_{z \in K} \left\{ \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} \frac{u_n(z)}{L_n^2(z)} \frac{H_n(z)}{h_n(z)} v_n(z) \right\}$$

El segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero pues el segundo factor tiende a cero con velocidad geométrica debido a (5.33) (el factor  $h_n$  es irrelevante pues sus ceros estan en  $\text{Co}(S(\mu))$ ). Entonces, para cualquier  $\epsilon > 0$  y para todo  $n$  suficientemente grande, se cumple

$$\{z \in K : |f(z) - R_n(f)(z)| > \epsilon\} \subset e_n,$$

donde  $\text{cap}(e_n) = 1/n$ . Esto prueba la convergencia en capacidad de  $R_n(f)$  a  $f$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ .

De modo que podemos utilizar ahora el lema de Gonchar enunciado en la sección anterior. Los polos de la función  $R_n(f)$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  son los ceros de  $q_{n,2}$  y su número no excede el número  $d$ . El número de los polos de  $f$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  es exactamente igual a  $d$ , de modo que la parte 1 del enunciado del teorema 5.23 se deduce ahora del lema de Gonchar. Por tanto, en todo conjunto compacto  $K \subset \mathbb{C} \setminus (\text{Co}(S(\mu)) \cup \mathcal{P})$  la función  $q_{n,2} t_d$  está inferiormente acotada para todo  $n$  suficientemente grande. Así, de (5.24) y de (5.33) se deduce que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - R_n(f)\|_K^{1/2n} \leq \|\exp(-G_{\Omega_m}(\nu; \cdot))\|_K, \quad (5.36)$$

donde  $K$  es cualquier subconjunto compacto de  $\mathbb{C} \setminus (\text{Co}(S(\mu)) \cup \mathcal{P})$  y  $m$  es un número natural arbitrario. Por tanto, con la ayuda del lema 3.5, demostramos la parte 2 del enunciado del teorema 5.23 para subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus (\text{Co}(S(\mu)) \cup \mathcal{P})$ . Como  $f - R_n(f)$  es holomorfa en un entorno de  $z = \infty$  y allí toma el valor 0, tenemos, por el principio del máximo, que (5.36) es válido para subconjuntos compactos arbitrarios de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\text{Co}(S(\mu)) \cup \mathcal{P})$ , lo cual completa la demostración si se cumplen (5.10) y  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = \infty$ .

Supongamos ahora que  $k(n) = o(n)$ . Sea  $K$  un conjunto compacto arbitrario de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . Sea  $\alpha = \min_{z \in K, \zeta \in I} |z - \zeta|$  y  $\beta = \max_{z \in K, \zeta \in I} |z - \zeta|$ . Si escogemos  $z \in K$  y utilizamos (5.27) y (5.28) con  $u_n$  en vez de  $v_n$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|u_n(z)|}{|L_n^2(z)|} \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)} &\leq \frac{\|L_n^2\|_{S(\mu)}}{|L_n^2(z)|} \frac{|u_n(z)|}{\min_{\zeta \in S(\mu)} |u_n(\zeta)|} \\ &\leq \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{2k(n)} \left( \frac{\|\exp(-P(\nu; \cdot))\|_K + \epsilon}{\min_{\zeta \in S(\mu)} |\exp(-P(\nu; \zeta))| - \epsilon} \right)^{2k(n)+4d}, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Por tanto, si  $k(n) = o(n)$ , llegamos a que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{L_n^2}{u_n} \right\|_{S(\mu)}^{1/2n} \left\| \frac{u_n(z)}{L_n^2(z)} \right\|_K^{1/2n} \leq 1,$$

donde  $K$  es cualquier subconjunto compacto de  $\mathbb{C} \setminus \text{Co}(S(\mu))$ . A partir de aquí, la demostración es análoga a la anterior usando esta última fórmula en vez de (5.32).

Finalmente, si sólo se cumple la condición (5.10), obtenemos el resultado deseado razonando por reducción al absurdo y pasando a subsucesiones.

□

Como se sabe que  $\|\exp\{-G_\Omega(\nu; \cdot)\}\|_K < 1$ , el teorema establece que los aproximantes multipuntuales tipo Padé convergen, al menos con razón de convergencia geométrica, a la función  $f$ . La combinación de 1. y 2. en el teorema anterior indica que  $R_n(f)$  converge a  $f$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Co}(S(\mu))$  en la métrica cordal de la esfera de Riemann.

En particular, si  $f = \hat{\mu}$ , se obtiene

**Corolario 5.6** *Supongamos que la sucesión de polinomios  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene  $\nu$  como su distribución asintótica de ceros y que  $\text{cap}(S(\mu)) > 0$ . Si  $k(n) = o(n)$  o se cumple (5.10) entonces, para todo subconjunto compacto  $K$  de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$ , se tiene*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\mu} - R_n(\hat{\mu})\|_K^{1/2n} \leq \|\exp\{-G_\Omega(\nu; \cdot)\}\|_K.$$

Este corolario y el teorema 2 en [22] están muy relacionados, sin embargo, ninguno de los resultados está contenido en el otro. A diferencia de [22], nosotros no pedimos que  $S(\mu)$  sea regular o que la medida  $\mu$  sea regular. Por otro lado, nuestra condición sobre los polinomios  $L_n$  es más fuerte y no obtenemos tasa exacta de convergencia.

Si, en el corolario 5.6, se escogen los polinomios  $w_n$  iguales a 1, podemos comparar este resultado y el teorema 2' en [4]. En el caso en que  $S(\mu)$  es un conjunto compacto regular, ambos resultados son equivalentes; en otro caso, la condición (5.10) es más fuerte que la que aparece en [4], pero nosotros permitimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n)/n$  sea igual a 1, lo que no se considera en [4]. El caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n)/n = 1$  se corresponde

con el caso donde “casi” todos los polos de  $R_n(\widehat{\mu})$  están fijos. En esta situación, la construcción de los aproximantes tipo Padé tiene el menor coste computacional posible ya que los ceros de  $L_n$  son un dato conocido.



# Epílogo

Para finalizar esta memoria, queremos mencionar algunas posibles líneas de investigación que pueden continuar o complementar el trabajo realizado, así como dejar constancia de varios problemas que surgieron durante la realización del mismo y que no se han logrado resolver o cuya resolución se ha pospuesto para más adelante.

En términos generales, existen dos tipos de problemas que, tras el trabajo desarrollado en la memoria, se pueden abordar como una consecuencia natural. Uno de ellos es la extensión de los resultados aquí obtenidos para medidas variantes del tipo  $d\mu_n/w_n$  al caso en que los ceros del polinomio  $w_n$  tienden rápidamente al soporte de la medida, como se comentó tras el corolario 2.1. Creemos que el tratamiento que se ha seguido junto con los resultados obtenidos por G. López en [62] hace plausible esta propuesta. Es interesante señalar que este tipo más general de medida variante se corresponde con problemas de aproximación de funciones analíticas con región de singularidad no acotada. En relación con esto, otro problema pendiente es la demostración del teorema 5.23 cuando  $f$  es una función de Stieltjes meromorfa.

Por otro lado, varios de los resultados sobre convergencia de polinomios ortogonales variantes probados en la memoria se pueden complementar con fórmulas asintóticas sobre el soporte de la medida. Tal es el caso, por ejemplo, de los teoremas de la sección § II.8; las técnicas que se deben emplear aparecen en [64]. Otro tanto puede decirse de los resultados de convergencia tipo Szegő de la sección § II.6; para demostrar los teoremas correspondientes se añaden condiciones tipo Dini-Lipschitz.

Desde un punto de vista más específico, quisiéramos también mencionar los siguientes problemas que han surgido en el contexto de la memoria:

- 1) Demostrar los teoremas 2.2 y 2.10 con hipótesis adecuadas de manera que

las del teorema 2.10 impliquen las del 2.2. Encontrar una relación entre las hipótesis respectivas tal como aparecen en el presente trabajo. Véase la sección § II.7 a este respecto.

- 2) Probar el lema 2.2 debilitando la condición  $|Q|h^{\pm 1}$  acotada. Quizás sea posible exigir únicamente que  $|Q|h^{\pm 1} \in L^p$ , para algún  $p > 1$ . Este problema no es exclusivo de la memoria, la condición  $|Q|h^{\pm 1} \in L^\infty$  aparece habitualmente en los teoremas sobre convergencia relativa (cf. [72] y [95]). La resolución de este problema puede catalogarse de difícil.
- 3) Una de las herramientas utilizadas en la memoria es el teorema de Stahl y Totik sobre el comportamiento asintótico de polinomios ortogonales variantes (véase p. 76). Parece razonable disponer de un resultado análogo prescindiendo de la regularidad del soporte de la medida. Demostrar este resultado es un problema interesante que, además y en lo que a la memoria se refiere, permitiría prescindir a su vez de esa hipótesis en el teorema 3.15 que trata de la convergencia de la raíz  $n$ -ésima de los polinomios de Stieltjes variantes.
- 4) Existe alguna evidencia numérica que avala la certeza de la fórmula

$$s_n^2(x) d\mu(x) \xrightarrow{*} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx, \quad n \rightarrow \infty,$$

donde  $s_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Stieltjes normalizado y  $S(\mu) = [-1, 1]$ . Esta fórmula es del tipo (1.10) y mostraría cuál es el comportamiento, en un sentido débil, de los polinomios de Stieltjes sobre el soporte de la medida. La enunciamos como conjetura.

- 5) Permanece sin resolver la aproximación de funciones de Markov meromorfas mediante aproximantes tipo Padé cuando la función racional tiene coeficientes complejos. En su resultado original [42], Gonchar utiliza de modo esencial la convergencia del cociente de los polinomios ortogonales. No se dispone del resultado análogo para polinomios ortogonales con respecto a la medida variante que aparece en el caso tipo Padé; más aún, existen indicios de que tal resultado es falso. No obstante lo anterior, creemos que debería de ser posible obtener un resultado de convergencia utilizando aproximantes tipo Padé.

Estas y otras cuestiones relacionadas con la aproximación racional de funciones analíticas y el comportamiento asintótico de polinomios ortogonales constituyen parte del trabajo que el autor, en colaboración con varias personas vinculadas al grupo de investigación existente en la Universidad Carlos III de Madrid, tiene previsto desarrollar en el futuro.



# Bibliografía

- [1] A. ANGELESCO, Sur deux extensions des fractions continues algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **168** (1919), 262-265.
- [2] A. AMBROLADZE Y H. WALLIN, Padé-type approximants of Markov and meromorphic functions, *J. Approx. Theory* **88** (1997), 354-369.
- [3] A. AMBROLADZE Y H. WALLIN, Convergence of rational interpolants with preassigned poles, *J. Approx. Theory* **89** (1997), 238-256.
- [4] A. AMBROLADZE Y H. WALLIN, Extremal polynomials with preassigned zeros and rational approximants, *Constr. Approx.* **14** (1998), 209-229.
- [5] A. I. APTEKAREV, Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case, *Math. USSR Sbornik* **64** (1989), 57-84.
- [6] A. I. APTEKAREV, Multiple orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 423-447.
- [7] A. I. APTEKAREV, Strong asymptotic behaviour of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems, *Mat. Sb.* **190** (1999), 631-670.
- [8] A. I. APTEKAREV Y H. STAHL, Asymptotics of Hermite-Padé polynomials, en "Progress in Approximation Theory: An International Perspective" (Proc. Internat. Conf. Tampa, FL, 1990; A. A. Gonchar y E. B. Saff, eds.), Springer-Verlag, New York, 1992, 127-168.
- [9] G. A. BAKER, JR., The existence and convergence of subsequences of Padé approximants, *J. Math. Anal. Appl.* **43** (1973), 498-528.

- [10] G. A. BAKER, JR. Y P. R. GRAVES-MORRIS, "Padé Approximants", Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [11] D. BARRIOS, G. LÓPEZ Y E. TORRANO, Location of zeros and asymptotics of polynomials satisfying three-term recurrence relations with complex coefficients, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* **80** (1995), 309-333.
- [12] D. BARRIOS ROLANÍA, G. LÓPEZ LAGOMASINO, A. MARTÍNEZ FINKELSHTEIN Y E. TORRANO GIMÉNEZ, On the domain of convergence and poles of complex J-fractions, *J. Approx. Theory* **93** (1998), 177-200.
- [13] D. BARRIOS ROLANÍA Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Ratio asymptotics for polynomials orthogonal on arcs of the unit circle, *Constr. Approx.* **15** (1999), 1-31.
- [14] M. BELLO HERNÁNDEZ, B. DE LA CALLE YSERN, J. J. GUADALUPE HERNÁNDEZ Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Asymptotics for Stieltjes polynomials, Padé-type approximants, and Gauss-Kronrod quadrature, *J. Analyse Math.*, presentado.
- [15] M. BELLO HERNÁNDEZ Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Ratio and relative asymptotics of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle, *J. Approx. Theory* **92** (1998), 216-244.
- [16] H.-P. BLATT, E. B. SAFF Y M. SIMKANI, Jentzsch-Szegő type theorems for the zeros of best approximants, *J. London Math. Soc.* **38** (1988), 307-316.
- [17] C. BREZINSKI, "Padé-type Approximation and General Orthogonal Polynomials", Birkhäuser Verlag, Basel. ISNM 50 (1980).
- [18] J. BUSTAMANTE GONZÁLEZ, Asymptotics for Angelesco-Nikishin Systems, *J. Approx. Theory* **85** (1996), 43-68.
- [19] J. BUSTAMANTE Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Hermite-Padé approximation for Nikishin systems of analytic functions, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* **77** (1994), 367-384.

- 
- [20] F. CALA Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, From Padé to Padé-type approximants. Exact rate of convergence, (Proc. Second Int. Conf. Approx. and Opt. in the Caribbean; M. Florenzano et. al., eds.), Peter Lang Series in Approx. and Opt. 8 (1995), 155-163.
- [21] F. CALA Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Multipoint Padé-type approximants. Exact rate of convergence, *Constr. Approx.* 14 (1998), 259-272.
- [22] F. CALA Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Multipoint rational approximants with preassigned poles, *J. Math. Anal. Appl.*, presentado.
- [23] B. DE LA CALLE YSERN Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Strong asymptotics of orthogonal polynomials with varying measures and Hermite-Padé approximants, *J. Comput. Appl. Math.* 99 (1998), 91-103.
- [24] B. DE LA CALLE YSERN Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Weak convergence of varying measures and Hermite-Padé orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* 15 (1999), 553-575.
- [25] B. DE LA CALLE YSERN Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, Convergence of multipoint Padé-type approximants, *J. Approx. Theory*, presentado.
- [26] T. CARLEMAN, "Les fonctions quasi-analytiques", Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [27] P. L. DUREN, "Theory of  $H^P$  Spaces", Academic Press, New York, 1970.
- [28] K. DRIVER Y H. STAHL, Normality in Nikishin systems, *Indag. Math.* 5 (1994), 161-187.
- [29] K. DRIVER Y H. STAHL, Simultaneous rational approximants to Nikishin systems I, *Acta Sci. Math.* 60 (1995), 245-263.
- [30] K. DRIVER Y H. STAHL, Simultaneous rational approximants to Nikishin systems II, *Acta Sci. Math.* 61 (1995), 261-284.

- [31] S. EHRICH, Asymptotic properties of Stieltjes polynomials and Gauss-Kronrod quadrature formulae, *J. Approx. Theory* **82** (1995), 287-303.
- [32] S. EHRICH, Asymptotic behaviour of Stieltjes polynomials for ultraspherical weight functions, *J. Comput. Appl. Math.* **65** (1995), 135-144.
- [33] S. EHRICH, Gauss-Kronrod quadrature error estimates for analytic functions, *Zeitschr. für Angew. Mathematik und Mechanik* **74** (1995), T691-T693.
- [34] S. EHRICH Y G. MASTROIANNI, On generalized Stieltjes polynomials and Lagrange interpolation, *Approximation Theory and Function Series, Bolyai Soc. Math. Stud.* **5** (1996), 187-203.
- [35] S. EHRICH Y G. MASTROIANNI, Stieltjes polynomials and Lagrange interpolation, *Math. Comp.* **66** No. 217 (1997), 311-331.
- [36] G. FREUD, "Orthogonal Polynomials", Pergamon Press, New York, 1971.
- [37] W. GAUTSCHI, Gauss-Kronrod quadrature — a survey, en "Numerical Methods and Approximation Theory III" (G. V. Milovanović, Ed.), 39-66, Niš, 1988.
- [38] W. GAUTSCHI Y S. E. NOTARIS, Stieltjes polynomials and related quadrature formulae for a class of weight functions, *Math. Comp.* **65** (1996), 1257-1268.
- [39] A. A. GONCHAR, A local condition of single-valuedness of analytic functions, *Math. USSR. Sbornik* **18** (1972), 151-167.
- [40] A. A. GONCHAR, On the convergence of Padé approximants, *Math. USSR. Sbornik* **21** (1973), 155-166.
- [41] A. A. GONCHAR, On a theorem of Saff, *Math. USSR. Sbornik* **23** (1974), 149-154.
- [42] A. A. GONCHAR, On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions, *Math. USSR. Sbornik* **26** (1975), 555-575.
- [43] A. A. GONCHAR, On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions, *Math. USSR. Sbornik* **27** (1975), 503-514.



- [44] A. A. GONCHAR, Poles of rows of the Padé table and meromorphic continuation of functions, *Math. USSR. Sbornik* **43** (1982), 527-546.
- [45] A. A. GONCHAR, On uniform convergence of diagonal Padé approximants, *Math. USSR. Sbornik* **46** (1983), 539-559.
- [46] A. A. GONCHAR Y G. LÓPEZ LAGOMASINO, On Markov's theorem for multipoint Padé approximants, *Math. USSR Sbornik* **34** (1978), 449-459.
- [47] A. A. GONCHAR Y E. A. RAKHMANOV, On the equilibrium problem for vector potentials, *Russian Math. Surveys* **40** (1985), 183-184.
- [48] A. A. GONCHAR Y E. A. RAKHMANOV, Equilibrium measure and distribution of zeros of extremal polynomials, *Math. USSR Sbornik* **53** (1986), 119-130.
- [49] A. A. GONCHAR Y E. A. RAKHMANOV, On the convergence of simultaneous Padé approximants for a system of functions of Markov type, *Proc. Steklov Inst. Math.* **64** (1989), 31-50.
- [50] A. A. GONCHAR Y E. A. RAKHMANOV, Equilibrium distributions and the rate of rational approximation of analytic functions, *Math. USSR Sbornik* **62** (1989), 305-348.
- [51] A. A. GONCHAR, E. A. RAKHMANOV Y S. N. SOROKIN, On Hermite-Padé approximants for systems of Markov type functions, *Mat. Sb.* **188** (1997), 671-696.
- [52] U. GRENANDER Y G. SZEGÖ, "Toeplitz Forms and their Applications", Chelsea Publishing Company, New York, 1984.
- [53] CH. HERMITE, Sur la fonction exponentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **77** (1873), 18-24, 74-79, 226-233, 285-293; publicado también en sus "Oeuvres", Tome III, Gauthier-Villars, Paris, 1912, pp. 150-181.
- [54] V. A. KALYAGIN, On a class of polynomials defined by two orthogonality relations, *Math. USSR. Sbornik* **38** (1981), 563-580.



- [55] L. KARLBERG Y H. WALLIN, Padé-type approximants and orthogonal polynomials for Markov-Stieltjes functions, *J. Comput. Appl. Math.* **32** (1990), 153-157.
- [56] A. S. KRONROD, Nodes and weight for quadrature formulae. Sixteen place table. Nauka Moscow, 1964, English Transl., Consultants Bureau, New York, 1965.
- [57] P. KOOSIS, "Introduction to  $H_p$  Spaces", Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [58] G. LÓPEZ LAGOMASINO, Conditions for convergence of multipoint Padé approximants for functions of Stieltjes type, *Math. USSR Sbornik* **35** (1979), 363-376.
- [59] G. LÓPEZ LAGOMASINO, On the convergence of the Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type, *Math. USSR Sbornik* **39** (1981), 281-288.
- [60] G. LÓPEZ LAGOMASINO, On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and the convergence of multipoint Padé approximants, *Math. USSR Sbornik* **56** (1987), 207-219.
- [61] G. LÓPEZ LAGOMASINO, Szegő's Theorem for polynomials orthogonal with respect to varying measures, en "Orthogonal Polynomials and their Applications" (M. Alfaro et al., eds.), Lec. Notes in Math. **1329**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 255-260.
- [62] G. LÓPEZ LAGOMASINO, Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials, *Math. USSR Sbornik* **64** (1989), 207-227.
- [63] G. LÓPEZ LAGOMASINO, Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures, *Constr. Approx.* **5** (1989), 199-219.

- [64] G. LÓPEZ LAGOMASINO, Relative asymptotics for polynomials orthogonal on the real axis, *Math. USSR Sbornik* **65** (1990), 505-529.
- [65] G. LÓPEZ LAGOMASINO Y V. V. VAVILOV, Survey on recent advances in inverse problems of Padé approximation theory, en "Rational Approximation and Interpolation" (P. R. Graves-Morris, E. B. Saff, R. S. Varga, eds.), *Lec. Notes in Math.* **1105**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 11-26.
- [66] D. S. LUBINSKY, Divergence of complex rational approximations, *Pacific J. Math.* **108** (1983), 141-153.
- [67] A. A. MARKOV, Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues, *Acta Math.* **19** (1895), 93-104.
- [68] H. N. MHASKAR Y E. B. SAFF, On the distribution of zeros of polynomials orthogonal on the unit circle, *J. Approx. Theory* **63** (1990), 30-38.
- [69] A. MÁTÉ, P. NEVAI Y V. TOTIK, What is beyond Szegő theory of orthogonal polynomials, en "Rational Approximation and Interpolation" (P. R. Graves-Morris, E. B. Saff, R. S. Varga, eds.), *Lec. Notes in Math.* **1105**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 502-510.
- [70] A. MÁTÉ, P. NEVAI Y V. TOTIK, Asymptotics for the ratio of leading coefficients of orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **1** (1985), 63-69.
- [71] A. MÁTÉ, P. NEVAI Y V. TOTIK, Strong and weak convergence of orthogonal polynomials on the unit circle, *Amer. J. Math.* **109** (1987), 239-282.
- [72] A. MÁTÉ, P. NEVAI Y V. TOTIK, Extensions of Szegő's theory of orthogonal polynomials, II, III, *Constr. Approx.* **3** (1987), 51-72; 73-96.
- [73] A. MÁTÉ, P. NEVAI Y V. TOTIK, Szegő's extremum problem on the unit circle, *Ann. Math.* **134** (1991), 433-453.
- [74] G. MONEGATO, Positivity of the weights of extended Gauss-Legendre quadrature rules, *Math. Comp.* **32** (1978), 243-245.



- [75] G. MONEGATO, Stieltjes polynomials and related quadrature rules, *SIAM Review* **24** (1982), 137-158.
- [76] R. DE MONTESSUS DE BALLORE, Sur les fractions continues algébriques, *Bull. Soc. Math. de France* **30** (1902), 28-36.
- [77] P. NEVAI, "Orthogonal Polynomials", Memoirs of Amer. Math. Soc. 213, Providence, Rhode Island, 1979.
- [78] P. NEVAI, Weakly convergent sequences of functions and orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **65** (1991), 322-340.
- [79] P. NEVAI Y V. TOTIK, Orthogonal polynomials and their zeros, *Acta Sci. Math.* **53** (1989), 99-114.
- [80] E. M. NIKISHIN, On simultaneous Padé approximants, *Math. USSR. Sbornik* **41** (1982), 409-425.
- [81] E. M. NIKISHIN Y V. N. SOROKIN, "Rational Approximation and Orthogonality," Transl. Math. Mon. 92, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.
- [82] S. E. NOTARIS, Error bounds for Gauss-Kronrod quadrature of analytic functions, *Numer. Math.* **64** (1993), 371-380.
- [83] J. NUTTALL, The convergence of Padé approximants of meromorphic functions, *J. Math. Anal. Appl.* **31** (1970), 147-153.
- [84] J. NUTTALL, Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials, *J. Approx. Theory* **42** (1984), 299-386.
- [85] J. NUTTALL Y S.R. SINGH, Orthogonal polynomials and Padé approximants with a system of arcs, *J. Approx. Theory* **21** (1977), 1-42.
- [86] H. PADÉ, Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles, Tesis, *Ann. de l'École Norm. Sup.* **9** (1892), suppl., 1-93.

- [87] H. PADÉ, Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, *Ann. de l'École Norm. Sup.* **16** (1899), 395-426.
- [88] F. PEHERSTORFER, On the asymptotic behaviour of functions of second kind and Stieltjes polynomials, and on Gauss-Kronrod quadrature formulas, *J. Approx. Theory* **70** (1992), 156-190.
- [89] F. PEHERSTORFER, Stieltjes polynomials and functions of second kind, *J. Comput. Appl. Math.* **65** (1995), 319-338.
- [90] CH. POMMERENKE, Padé approximants and convergence in capacity, *J. Math. Anal. Appl.* **41** (1973), 775-780.
- [91] E. A. RAKHMANOV, Convergence of diagonal Padé approximants, *Math. USSR Sbornik* **33** (1977), 243-260.
- [92] E. A. RAKHMANOV, On the convergence of Padé approximants in classes of holomorphic functions, *Math. USSR Sbornik* **40** (1981), 149-155.
- [93] E. A. RAKHMANOV, On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials, II, *Math. USSR Sbornik* **46** (1983), 105-117.
- [94] E. A. RAKHMANOV, On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real axis, *Math. USSR Sbornik* **47** (1984), 155-193.
- [95] E. A. RAKHMANOV, On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the circle with weights not satisfying Szegő's condition, *Math. USSR Sbornik* **58** (1987), 149-167.
- [96] T. RANSFORD, "Potential Theory in the Complex Plane", London Mathematical Society, Student Texts 28, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [97] W. RUDIN, "Análisis real y complejo", Alhambra, Madrid, 1985.
- [98] E. B. SAFF, Regions of meromorphy determined by the degree of best rational approximation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **29** (1971), 30-38.

- [99] E. B. SAFF, An extension of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rational functions, *J. Approx. Theory* **6** (1972), 63-67.
- [100] E. B. SAFF Y V. TOTIK, "Logarithmic Potentials with External Fields", (A Series of Comprehensive Studies in Math. 316), Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [101] V. N. SOROKIN, A transcendence measure for  $\pi^2$ , *Mat. Sb.* **187** (1996), 1819-1852.
- [102] H. STAHL, Divergence of diagonal Padé approximants and the asymptotic behaviour of orthogonal polynomials associated with nonpositive measures, *Constr. Approx.* **1** (1985), 249-270.
- [103] H. STAHL, Orthogonal polynomials with complex-valued weight function I,II, *Constr. Approx.* **2** (1986), 225-251.
- [104] H. STAHL, On the convergence of generalized Padé approximants, *Constr. Approx.* **5** (1989), 221-240.
- [105] H. STAHL, The convergence of Padé approximants to functions with branch points, *J. Approx. Theory* **91** (1997), 139-204.
- [106] H. STAHL, The convergence of diagonal Padé approximants and the Padé conjecture, *J. Comput. Appl. Math.* **86** (1997), 287-296.
- [107] H. STAHL, Spurious poles in Padé approximation, *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 511-527.
- [108] H. STAHL Y V. TOTIK, "General Orthogonal Polynomials", Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [109] T. J. STIELTJES, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** (1894), 1-122. **9** (1894), 1-47. También en "Oeuvres complètes", Vol. 2, pp. 402-566, Noordhoff, Groningen, 1918.
- [110] T. J. STIELTJES, "Correspondence d'Hermite et de Stieltjes", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

- [111] S. P. SUTIN, On poles of the  $m$ th row of a Padé table, *Math. USSR Sbornik* 48 (1984), 493-497.
- [112] S. P. SUTIN, On an inverse problem for the  $m$ th row of the Padé table, *Math. USSR Sbornik* 52 (1985), 231-244.
- [113] G. SZEGŐ, "Orthogonal Polynomials", Coll. Pub. XXIII, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1975 (cuarta edición).
- [114] G. SZEGŐ, Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehören, *Math. Ann.* 110 (1935), 501-513.
- [115] W. VAN ASSCHE, "Asymptotics for Orthogonal Polynomials", Lec. Notes in Math. 1265, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [116] W. VAN ASSCHE, "Analytic Aspects of Orthogonal Polynomials", Katholieke Universiteit Leuven, manuscrito, 1993.
- [117] W. VAN ASSCHE, Approximation theory and analytic number theory, en "Special Functions and Differential Equations" (K. Srinivasa Rao et al., eds.), Allied Publishers, New Delhi, 1998, 336-355.
- [118] W. VAN ASSCHE, Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence, *Contemporary Mathematics* 236, Amer. Math. Soc. 1999, 325-342.
- [119] H. WALLIN, The convergence of Padé approximants and the size of the power series coefficients, *Applicable Anal.* 4, (1974), 235-251.
- [120] J. WALSH, "Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain", Coll. Pub. XX, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1969.

## *Bibliografia*

---